



Introdução aos metamateriais eletromagnéticos

Prof. Dr. Gláucio Lima Siqueira



Instituto de Inovação
em Meta Materiais

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

Informações gerais

- Contato
 - glaucio@cetuc.puc-rio.br
- Dia e horário do curso
 - Sextas-feiras, de 09h às 12h
 - Sala 3 do CETUC
- Avaliação
 - Lista de exercícios
 - Projeto final
- Referência Bibliográfica
 - ELE5322 21st Century Electromagnetics, Dr. Raymond C. Rumpf, UTEP, USA
 - <http://emlab.utep.edu/ee5390em21.htm/>

Ementa (I)

- **Parte 1 – Eletrodinâmica em meios periódicos**
 - Tópico 1 – Revisão do eletromagnetismo clássico
 - Tópico 2 – Modelos de Drude e Lorentz para condutores e dielétricos
 - Tópico 3 – Propagação da onda eletromagnética em meios anisotrópicos e não lineares
 - Tópico 4 – Teoria dos modos acoplados
 - Tópico 5 – Teoria das estruturas periódicas
 - **Tópico 6 – Redes de difração**
 - Tópico 7 – Ressonância do modo guiado
 - Tópico 8 – Homogeneização de estruturas periódicas

Ementa (II)

- **Parte 2 – Fenômeno e aplicações de metamateriais**
 - Tópico 9 – Teoria dos metamateriais
 - Tópico 10 – Eletromagnetismo transformacional aplicado aos metamateriais
 - Tópico 11 – Ondas de superfície
 - Tópico 12 – Ondas lentas
 - Tópico 13 – Linha de transmissão orientada à esquerda
 - Tópico 14 – Aplicações de metamateriais

Tópico 6

Redes de Difração

- Séries de Fourier
- Redes de difração
- O espectro de ondas planas (PWS)
- PWS para redes bidimensionais
- Aplicações: Espectrômetro, Redes de Littrow, Difração Ótica
- Teoria do Meio Efetivo
- Redes Antirreflexivas
- Placas de Ondas

Série de Fourier

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

Jean Baptiste Joseph Fourier



Jean Baptiste Joseph Fourier

Born: March 21, 1768
in Yonne, France.

Died: May 16, 1830
in Paris, France.

Série de Fourier complexa em 1D

- Se uma função $f(x)$ é periódica com período Λ , ela pode ser expandida em uma série de Fourier complexa:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{j \frac{2\pi m x}{\Lambda}}$$

$$a(m) = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} f(x) e^{-j \frac{2\pi m x}{\Lambda}} dx$$



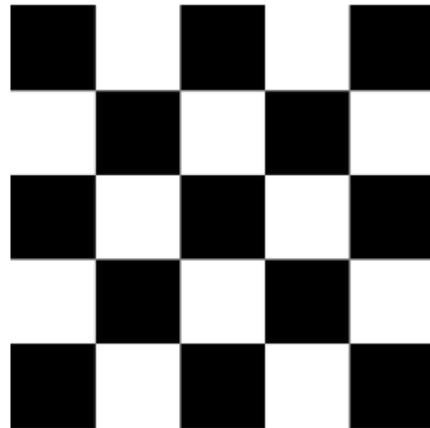
- Tipicamente, podemos considerar apenas alguns termos e, ainda assim, termos uma boa aproximação

$$f(x) = \sum_{m=-M}^M a(m) e^{j \frac{2\pi m x}{\Lambda}}$$

Série de Fourier complexa em 2D

- Para funções periódicas de duas variáveis (de formas regulares), a série de Fourier complexa pode ser generalizada em :

$$f(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} a(p, q) e^{j\left(\frac{2\pi px}{\Lambda_x} + \frac{2\pi qy}{\Lambda_y}\right)} \quad a(p, q) = \frac{1}{A} \iint_A f(x, y) e^{-j\left(\frac{2\pi px}{\Lambda_x} + \frac{2\pi qy}{\Lambda_y}\right)} dA$$

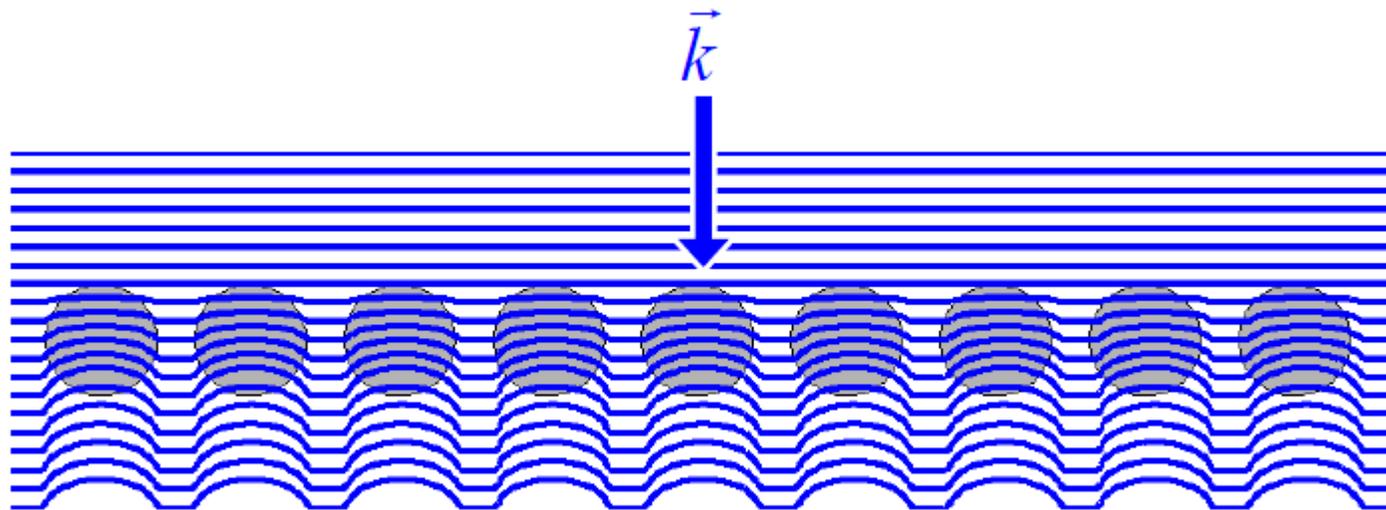


Redes de Difração

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

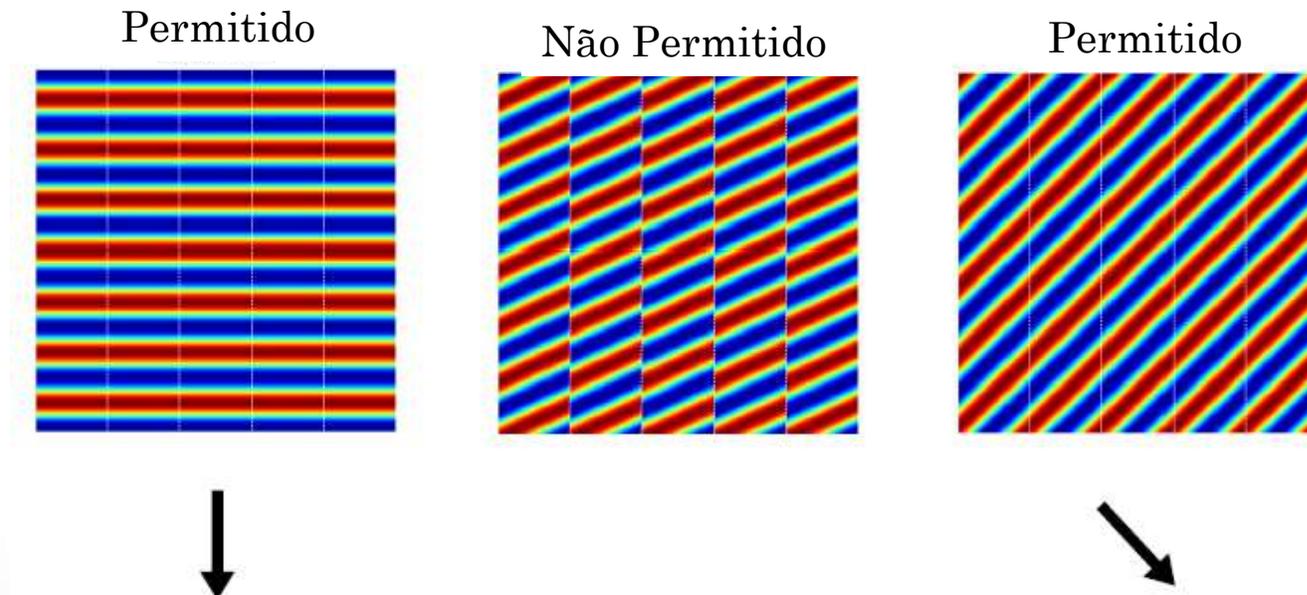
Campos em estruturas periódicas

Ondas em estruturas periódicas adquirem a mesma periodicidade da estrutura



Ordens de difração

- Os campos devem ser contínuos e, portanto, somente direções discretas são permitidas
- As direções permitidas são chamadas ordens de difração
- Os ângulos permitidos são calculados pela equação da rede



PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

O campo EM em uma rede periódica

- A função dielétrica de uma rede periódica senoidal pode ser escrita como:

$$\varepsilon_r(\vec{r}) = \varepsilon_{r,\text{avg}} + \Delta\varepsilon \cos(\vec{K} \cdot \vec{r})$$

- Uma onda propagando através desta rede adquirirá a mesma simetria:

$$\begin{aligned} E(\vec{r}) &= A(\vec{r}) e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \\ &= A \left[\varepsilon_{r,\text{avg}} + \Delta\varepsilon \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \right] e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \\ &= \underbrace{A\varepsilon_{r,\text{avg}} e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}}}_{\text{wave 1}} + \underbrace{\frac{A\Delta\varepsilon}{2} e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} - \vec{K}) \cdot \vec{r}}}_{\text{wave 2}} + \underbrace{\frac{A\Delta\varepsilon}{2} e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} + \vec{K}) \cdot \vec{r}}}_{\text{wave 3}} \end{aligned}$$

A rede produz novas ondas

- A onda aplicada se divide em três ondas

$$e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \rightarrow \begin{matrix} e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \\ e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} - \vec{K}) \cdot \vec{r}} \\ e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} + \vec{K}) \cdot \vec{r}} \end{matrix}$$

- Cada uma delas também se divide em três outras

$$e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \rightarrow \begin{matrix} e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \\ e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} - \vec{K}) \cdot \vec{r}} \\ e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} + \vec{K}) \cdot \vec{r}} \end{matrix} \quad e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} - \vec{K}) \cdot \vec{r}} \rightarrow \begin{matrix} e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} - \vec{K}) \cdot \vec{r}} \\ e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} - 2\vec{K}) \cdot \vec{r}} \\ e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \end{matrix} \quad e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} + \vec{K}) \cdot \vec{r}} \rightarrow \begin{matrix} e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} + \vec{K}) \cdot \vec{r}} \\ e^{-j\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r}} \\ e^{-j(\vec{k}_{\text{inc}} + 2\vec{K}) \cdot \vec{r}} \end{matrix}$$

- E assim por diante

$$\vec{k}(m) = \vec{k}_{\text{inc}} - m\vec{K} \quad m = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Essa equação descreve o conjunto total de todas as harmônicas permitidas (harmônicas espaciais)

Onda incidente numa rede

- As condições de contorno requerem que as componentes tangenciais do vetor de onda sejam contínuas:

$$k_{x,tm} = k_{x,inc}$$

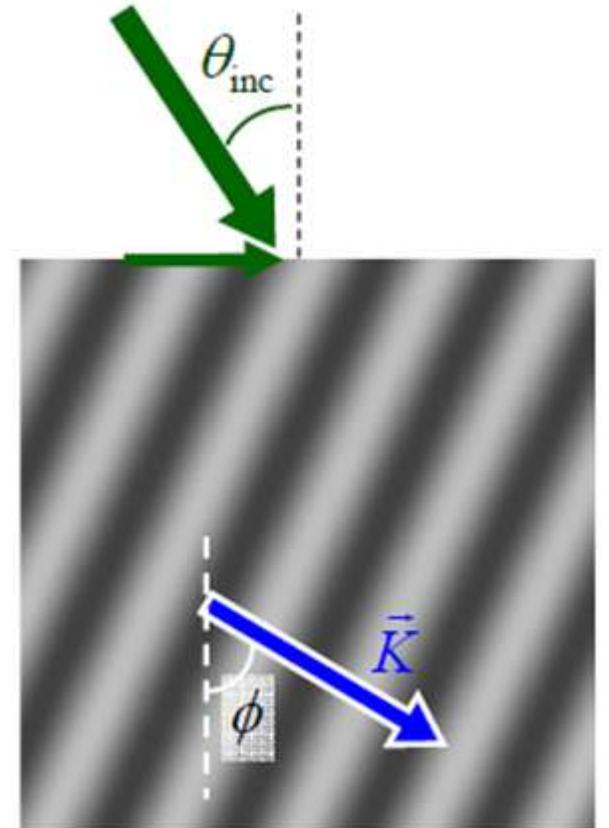
- A onda entra na rede e a condição de casamento de fase fica:

$$k_x(m) = k_{x,inc} - mK_x$$

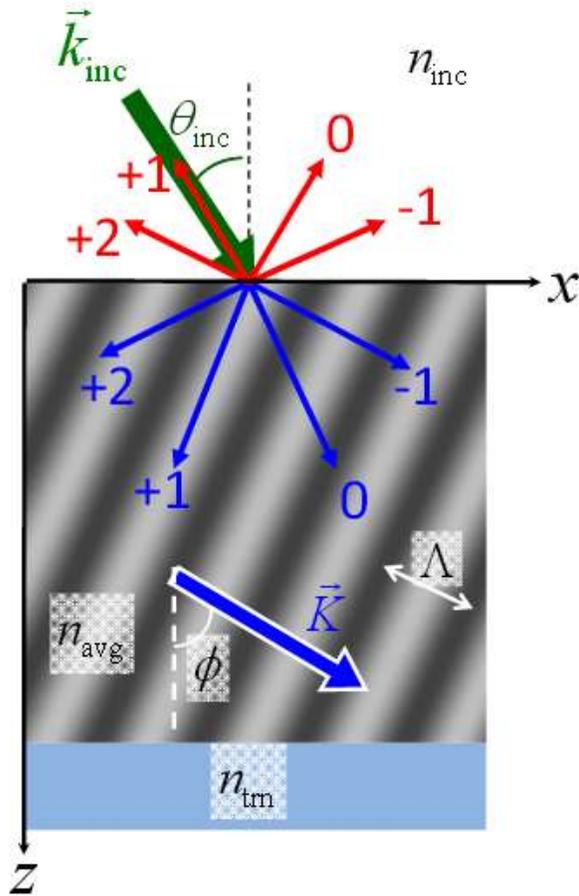
- A componente longitudinal do vetor de onda é calculada pela relação de dispersão:

$$k_z^2(m) = (k_0 n_{avg})^2 - k_x^2(m)$$

- Para m muito grande, k_z pode se tornar imaginário. Isso indica que harmônicas espaciais de altas ordens são evanescentes



A equação da rede



A EQUAÇÃO DA REDE

$$n_{\text{avg}} \sin [\theta(m)] = n_{\text{inc}} \sin \theta_{\text{inc}} - m \frac{\lambda_0}{\Lambda} \sin \phi$$

Essa equação é, na realidade, a condição de casamento de fase do slide anterior!

A equação da rede em regiões diferentes

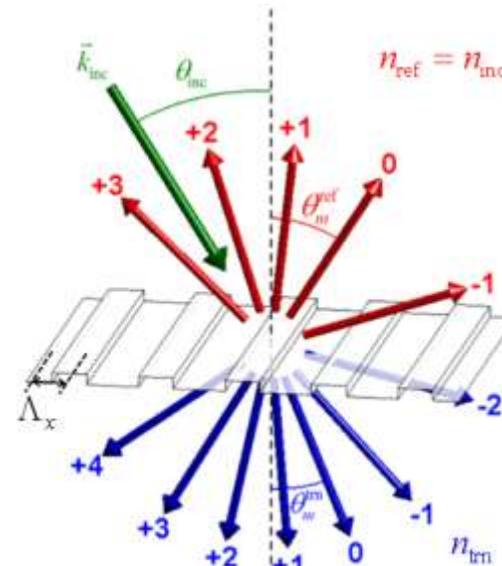
- O ângulo dos diferentes modos difratados são relacionados com o comprimento de onda e o vetor de rede pela equação de rede
- A equação de onda APENAS prediz a direção dos modos, não a potência contida neles
- Para conhecer a distribuição de potência entre os modos, é preciso resolver as equações de Maxwell

Reflection Region

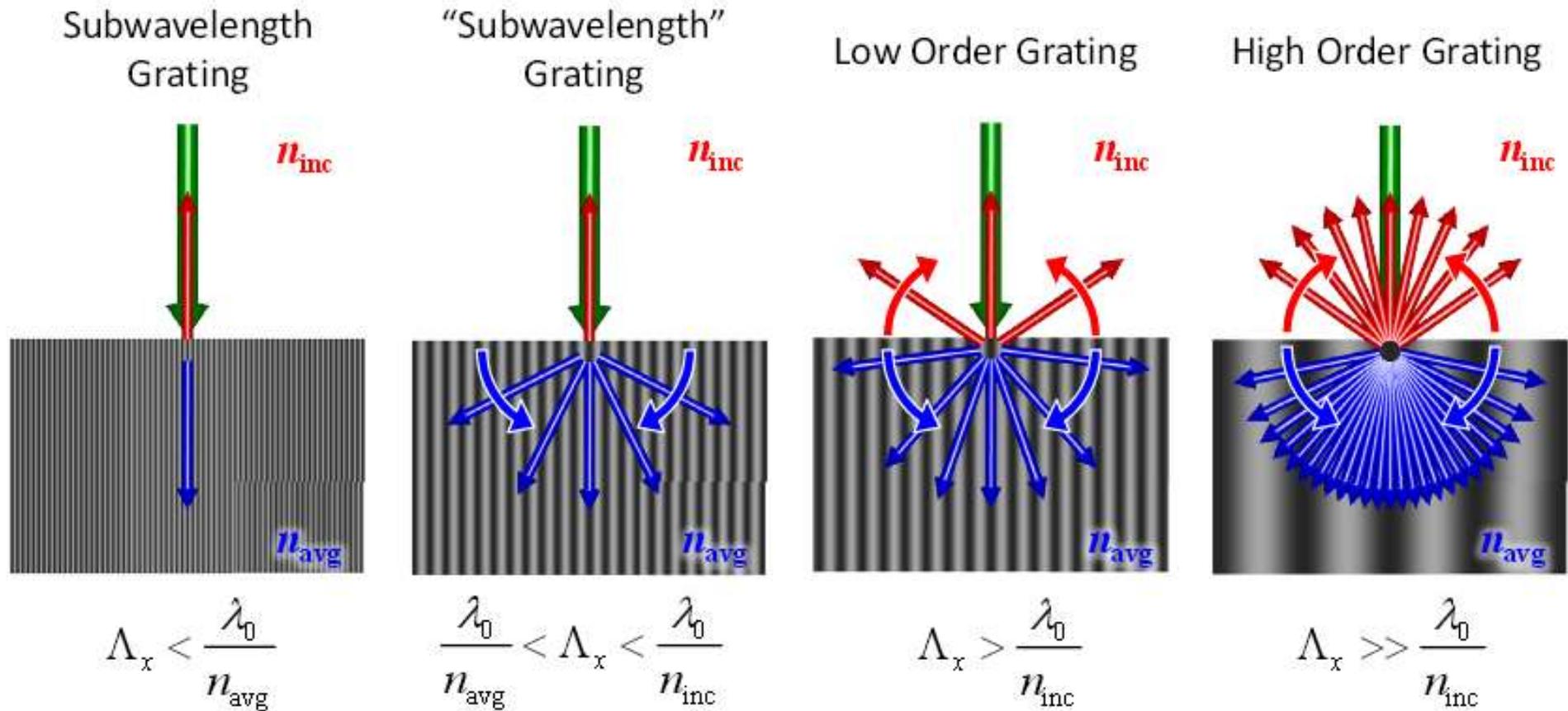
$$n_{\text{ref}} \sin[\theta(m)] = n_{\text{inc}} \sin \theta_{\text{inc}} - m \frac{\lambda_0}{\Lambda_x}$$

Transmission Region

$$n_{\text{trn}} \sin[\theta(m)] = n_{\text{inc}} \sin \theta_{\text{inc}} - m \frac{\lambda_0}{\Lambda_x}$$



Efeito da periodicidade da rede



Comprimento de onda de corte da rede

- Quando θ_m se torna imaginário, o modo é evanescente e cortado
- Assumindo incidência normal (i.e. $\theta_{inc} = 0^\circ$) a equação da rede se reduz a:

$$n \sin[\theta(m)] = -m \frac{\lambda_0}{\Lambda_x}$$

- Os primeiros modos difratados que aparecem são $m = \pm 1$
- O corte dos modos de primeira ordem acontece quando $\theta(\pm 1) = 90^\circ$:

$$\theta(\pm 1) = 90^\circ$$

$$\sin[90^\circ] = 1 = \frac{\lambda_0}{n\Lambda_x}$$

$$\boxed{\Lambda_x = \frac{\lambda_0}{n}}$$

Para prevenir os modos de primeira ordem precisamos:

$$\Lambda_x < \frac{\lambda_0}{n}$$

Para garantir os modos de primeira ordem precisamos:

$$\Lambda_x > \frac{\lambda_0}{n}$$

Número total de modos difratados

- Dado o período da rede Λ_x e o comprimento de onda λ_0 , podemos determinar quantos modos difratados existem. Assumindo, novamente, incidência normal:

$$\sin[\theta(m)] = -\frac{m\lambda_0}{n_{\text{avg}}\Lambda_x} \quad \rightarrow \quad \left| \sin[\theta(m)] \right| = \left| \frac{m\lambda_0}{n_{\text{avg}}\Lambda_x} \right| < 1$$

- Assim, o máximo valor de m é:

$$m_{\text{max}} = \frac{n_{\text{avg}}\Lambda_x}{\lambda_0}$$

- O número total possível de modos difratados M é então $2m_{\text{max}} + 1$:

$$M = \frac{2n_{\text{avg}}\Lambda_x}{\lambda_0} + 1$$

Três modos de operação de redes 1D

Redes de Bragg

Acopla energia entre ondas contra propagantes

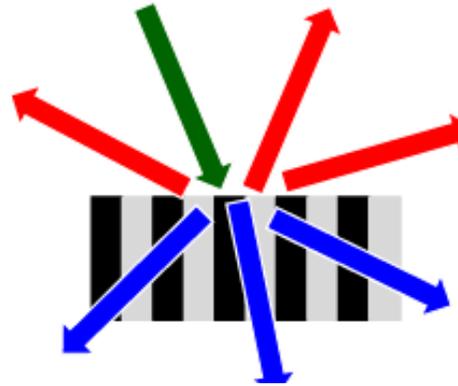


Aplicações

- Filtros ópticos de filme fino
- Redes de fibra ótica
- Multiplexação por divisão de comprimento de onda
- Espelhos dielétricos
- Guias de onda de cristais fotônicos

Redes de Difração

Acopla energia entre ondas de ângulos diferentes



Aplicações

- Divisor de feixe
- Padrão de rede fan-out
- Travamento de laser
- Espectrometria
- Sensoriamento
- Antirreflexão
- Superfícies seletivas de frequência
- Redes de acoplamento.

Redes de Período Longo

Acopla energia entre ondas copropagantes

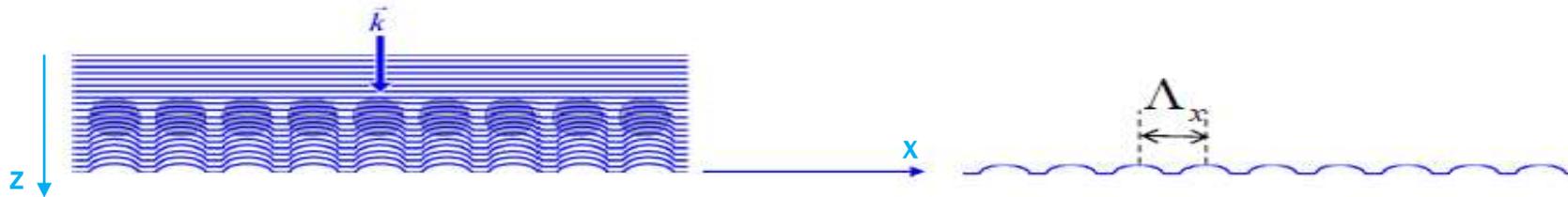


Aplicações

- Sensoriamento
- Acoplamento direcional.

Espectro de Ondas Planas (PWS)

Funções periódicas → Série de Fourier



- Ondas numa estrutura periódica obedecem a equação de Bloch

$$E(x, z) = A(x, z)e^{j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}$$

- O envelope $A(x, z)$ é periódico em x com período Λ_x

$$E(x, z) = e^{j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(m, z)e^{-j\frac{2\pi m x}{\Lambda_x}}$$

- Componente transversal do m -ésimo termo do vetor de onda:

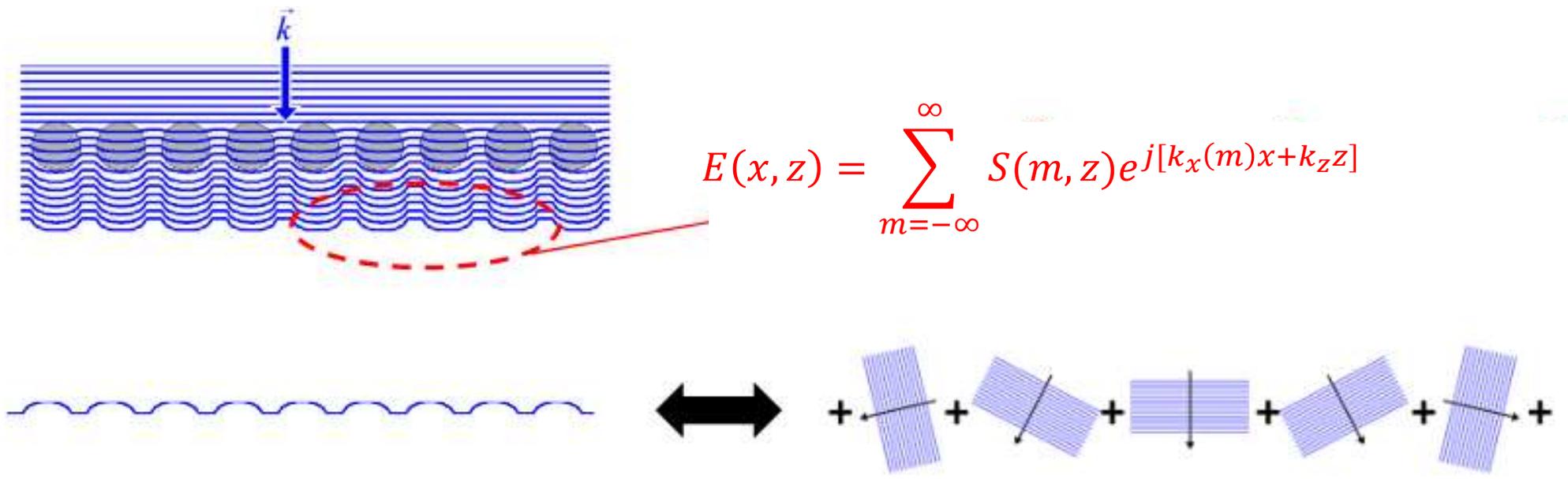
$$k_x(m) = \beta_x - \frac{2\pi m}{\Lambda_x}$$

- Então, o campo fica:

$$E(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(m, z)e^{jk_x(m)x}e^{j\beta_z z} \longrightarrow E(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(m)e^{j\vec{k}_m \cdot \vec{r}}$$

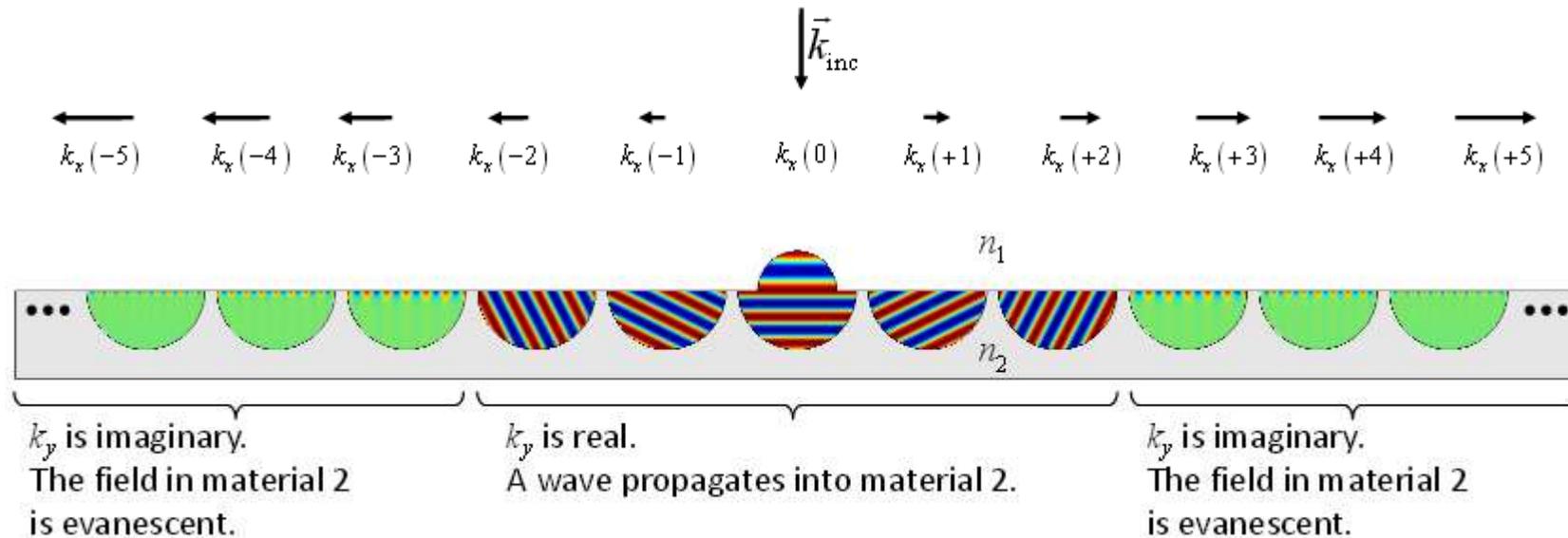
Espectro de onda plana

- Rearranjando os termos, percebe-se que os campos periódicos podem ser pensados como uma soma infinita de ondas planas em diferentes ângulos
- Esse conjunto de ondas chama-se espectro de onda plana do campo (PWS)



Efeito do Casamento de Fase

- A expansão do vetor de onda nos onze primeiros modos pode ser visualizada como:



Nota: Os campos “evanescente” no meio 2 não são completamente evanescentes. Eles têm k_x puramente real de modo que alguma energia flui na direção transversal.

PWS para Redes Bidimensionais

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

Terminologia de redes

Redes 1D
Ruled grating



Requerem simulação 2D

Redes 2D
Crossed grating



Requerem simulação 3D

Redes bidimensionais

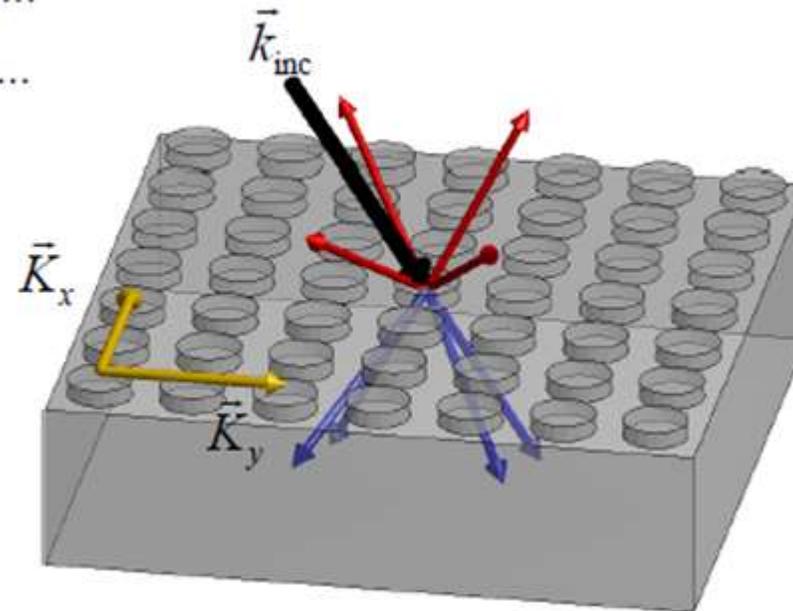
- Redes duplamente periódicas, também conhecidas como “crossed gratings”, difratam ondas em várias direções. Elas são descritas por dois vetores de rede \vec{K}_x e \vec{K}_y
- Duas condições de contorno são necessárias:

$$k_x(m) = k_{x,\text{inc}} - mK_x \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

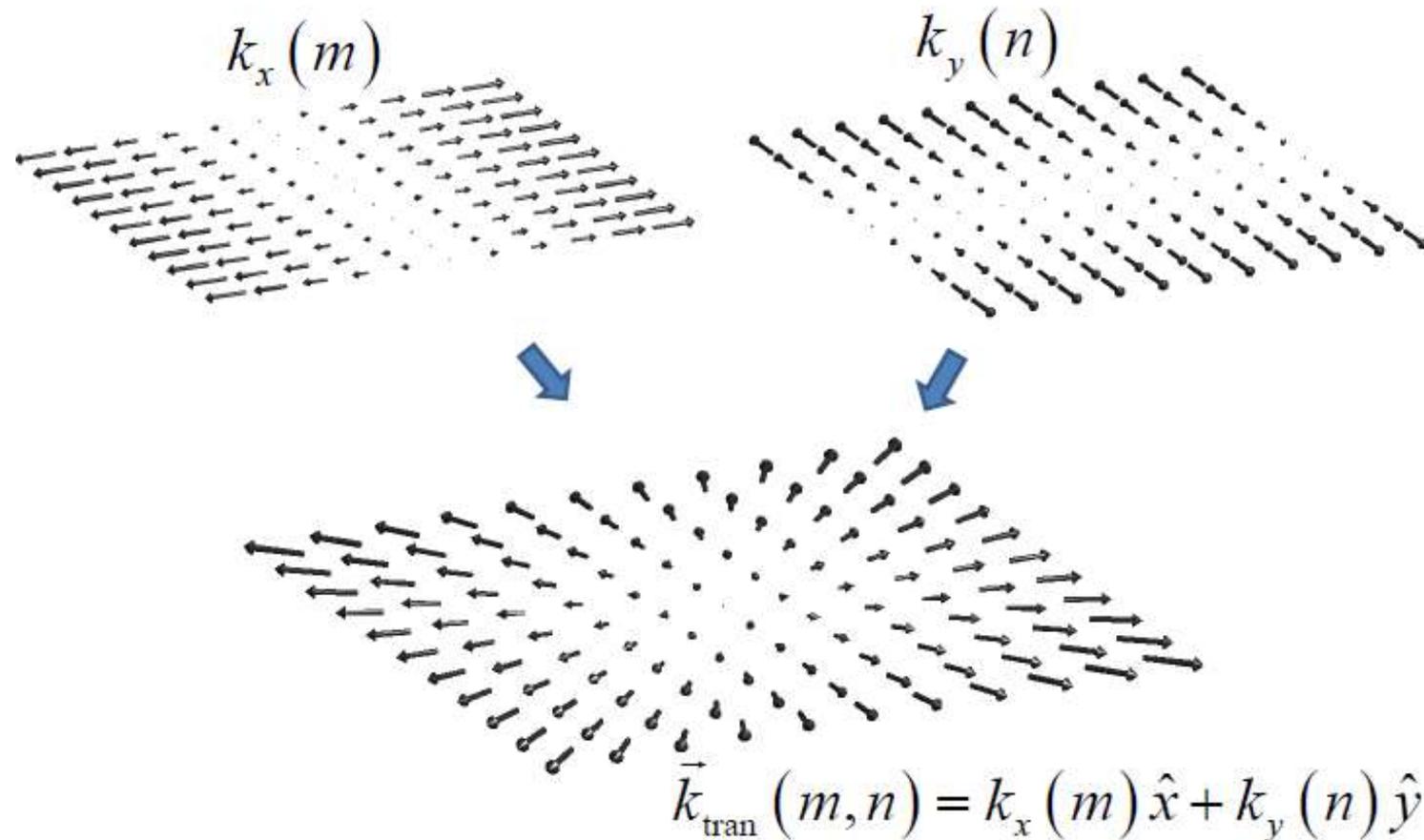
$$k_y(n) = k_{y,\text{inc}} - nK_y \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\vec{K}_x = \frac{2\pi}{\Lambda_x} \hat{x}$$

$$\vec{K}_y = \frac{2\pi}{\Lambda_y} \hat{y}$$



Visualizando a Expansão dos Vetores de Onda Transversais



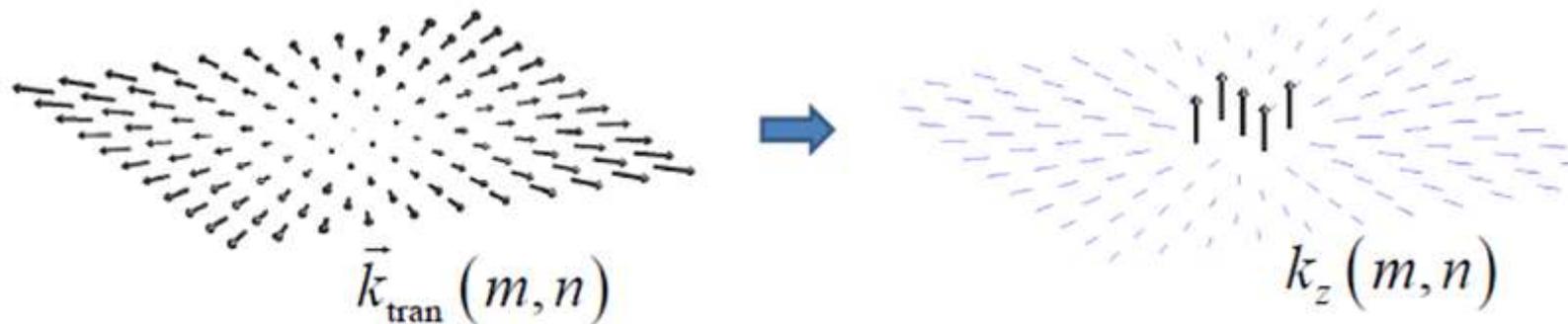
Expansão do vetor de onda longitudinal

- As componentes longitudinais dos vetores de onda são calculadas por:

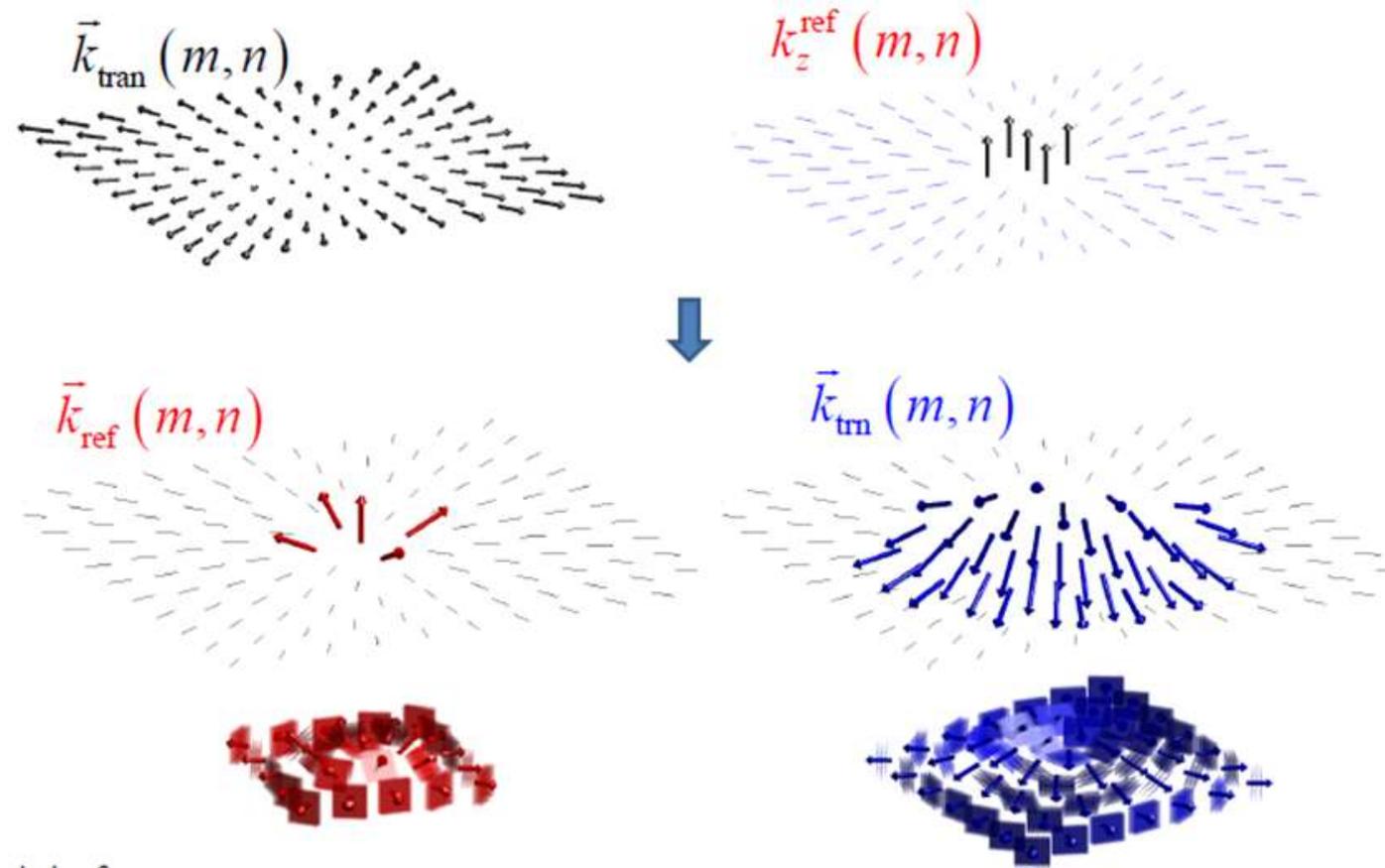
$$k_z^{\text{ref}}(m, n) = \sqrt{(k_0 n_{\text{ref}})^2 - k_x^2(m) - k_y^2(n)}$$

$$k_z^{\text{tm}}(m, n) = \sqrt{(k_0 n_{\text{tm}})^2 - k_x^2(m) - k_y^2(n)}$$

- Poucos modos centrais terão k_z real. Eles correspondem a ondas propagantes. Os outros modos terão k_z imaginário e correspondem a ondas evanescentes que não transportam energia



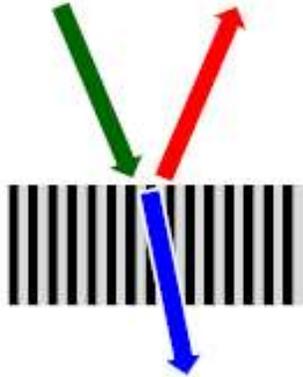
Visão geral da expansão do vetor de onda



Aplicações de redes periódicas

Redes Sub-Comprimento de Onda

Somente o modo de ordem zero pode existir

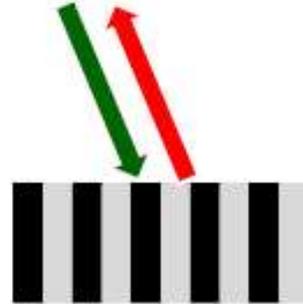


Aplicação

- Polarizadores
- Birrefringência artificial
- Forma de birrefringência
- Antirreflexão
- Meio de índice efetivo

Redes de Littrow

Redes na configuração Littrow são retrorrefletores espectralmente seletivos

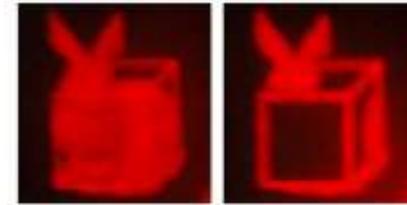


Aplicação

- Sensores
- Laser

Redes de Padrão Fanout

Redes que difratam a luz de lasers para formar imagens

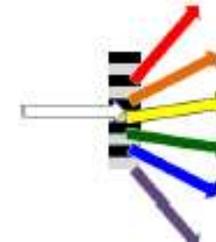


Hologramas

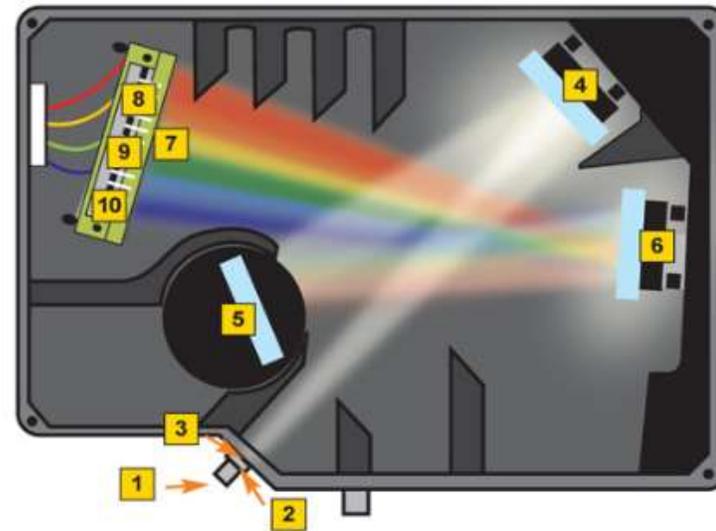
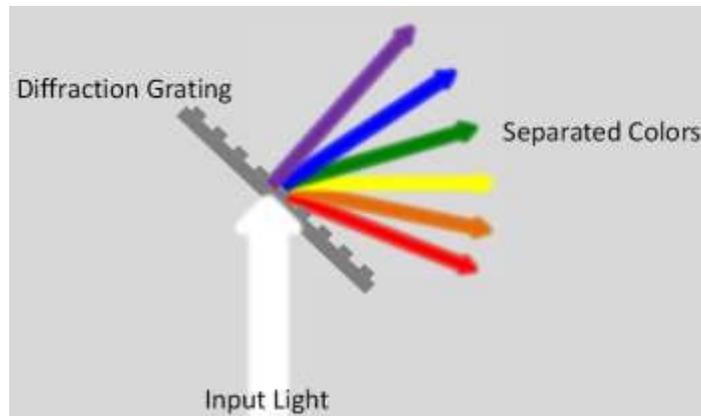
Hologramas são armazenados como redes periódicas

Espectrometria

Redes separam luz de faixa larga em suas componentes de cores



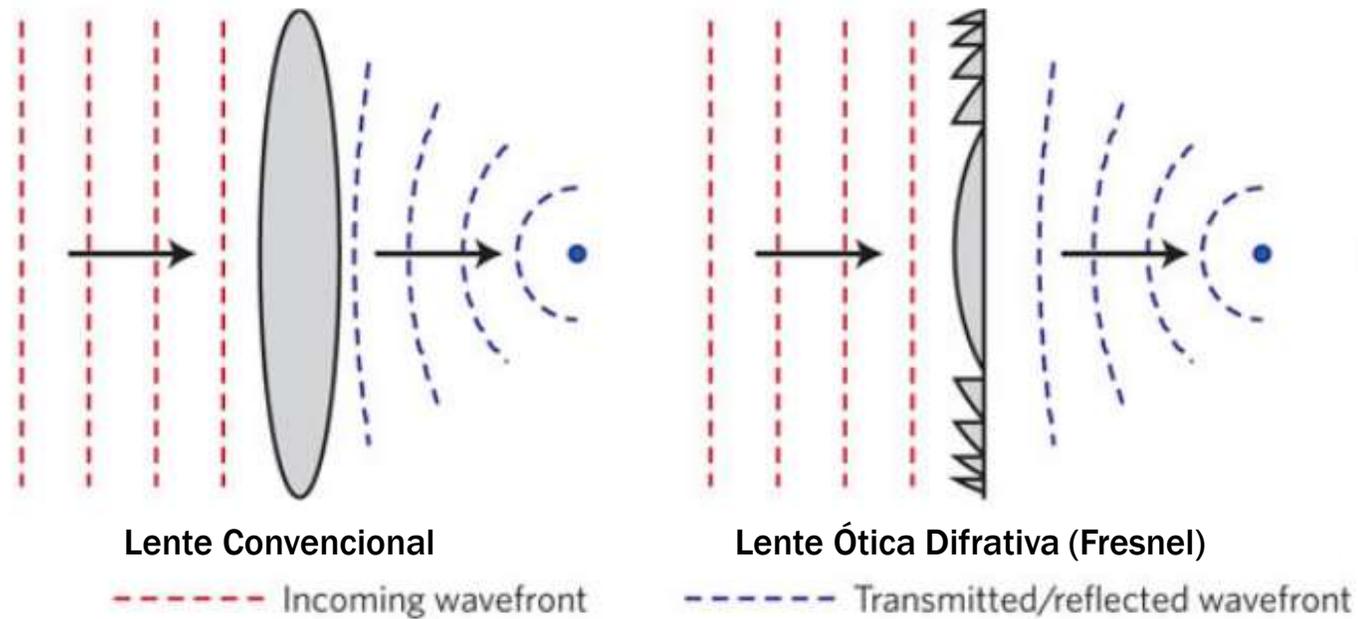
Espectrometria



Fiber Optic Input

- | | | | |
|-------------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| 1 SMA Connector | 4 Collimating Mirror | 7 Collection Lenses | 10 Optional UV Detector |
| 2 Entrance Slit | 5 Diffraction Grating | 8 Detector Array | |
| 3 Optional Filter | 6 Focusing Mirror | 9 Optional Filter | |

Elemento óptico difrativo



Lukas Chrostowski, "Optical gratings: Nano-engineered lenses," *Nature Photonics* 4, 413-415 (2010).

NOTA:

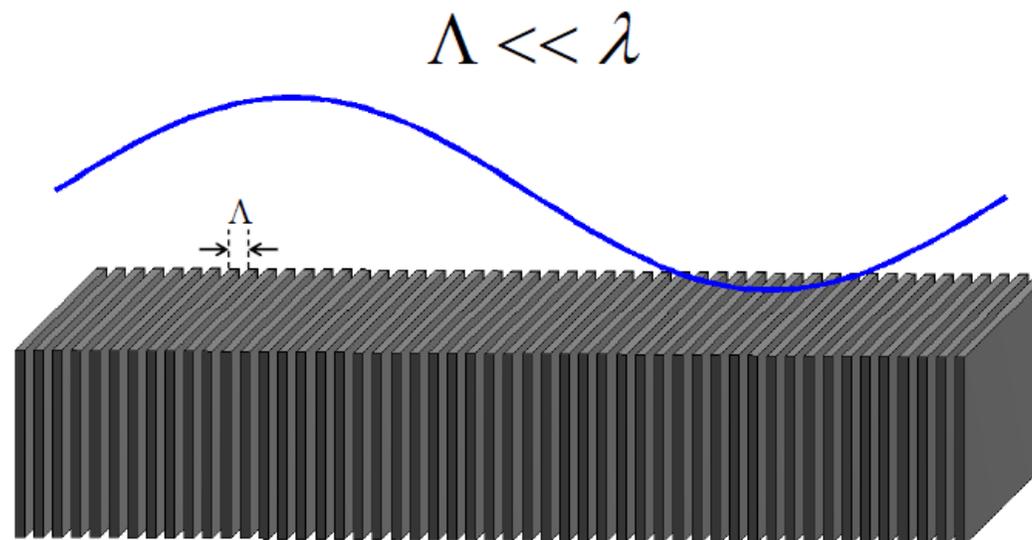
Se o dispositivo opera apenas numa faixa estreita, eles podem ser "aplainados".
Dispositivos apainados são chamados elementos óticos difrativos (DOE).

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

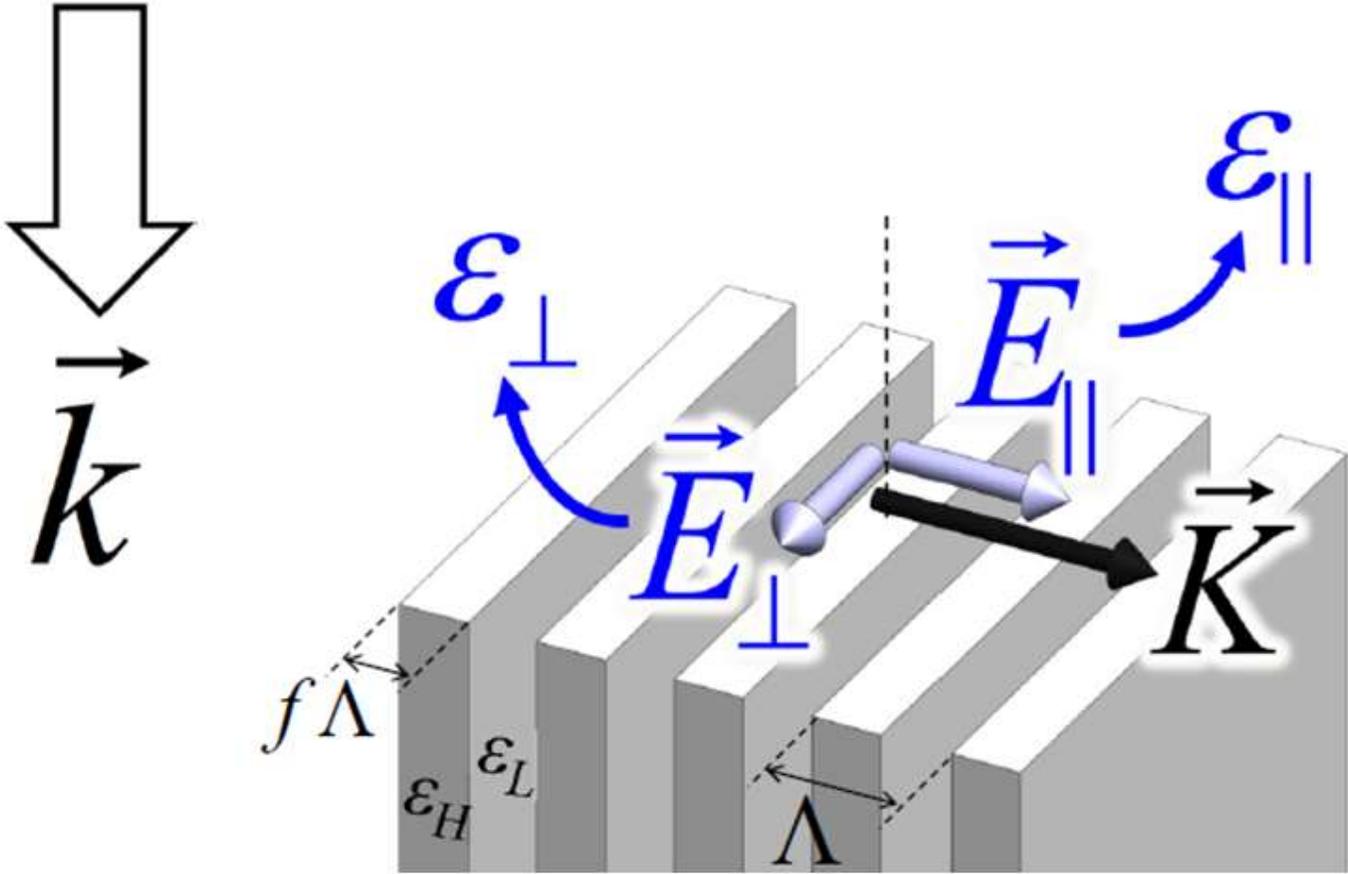
Teoria do Meio Efetivo (EMT) **(para redes de sub-comprimento de onda)**

Hipótese macroscópica e homogenização

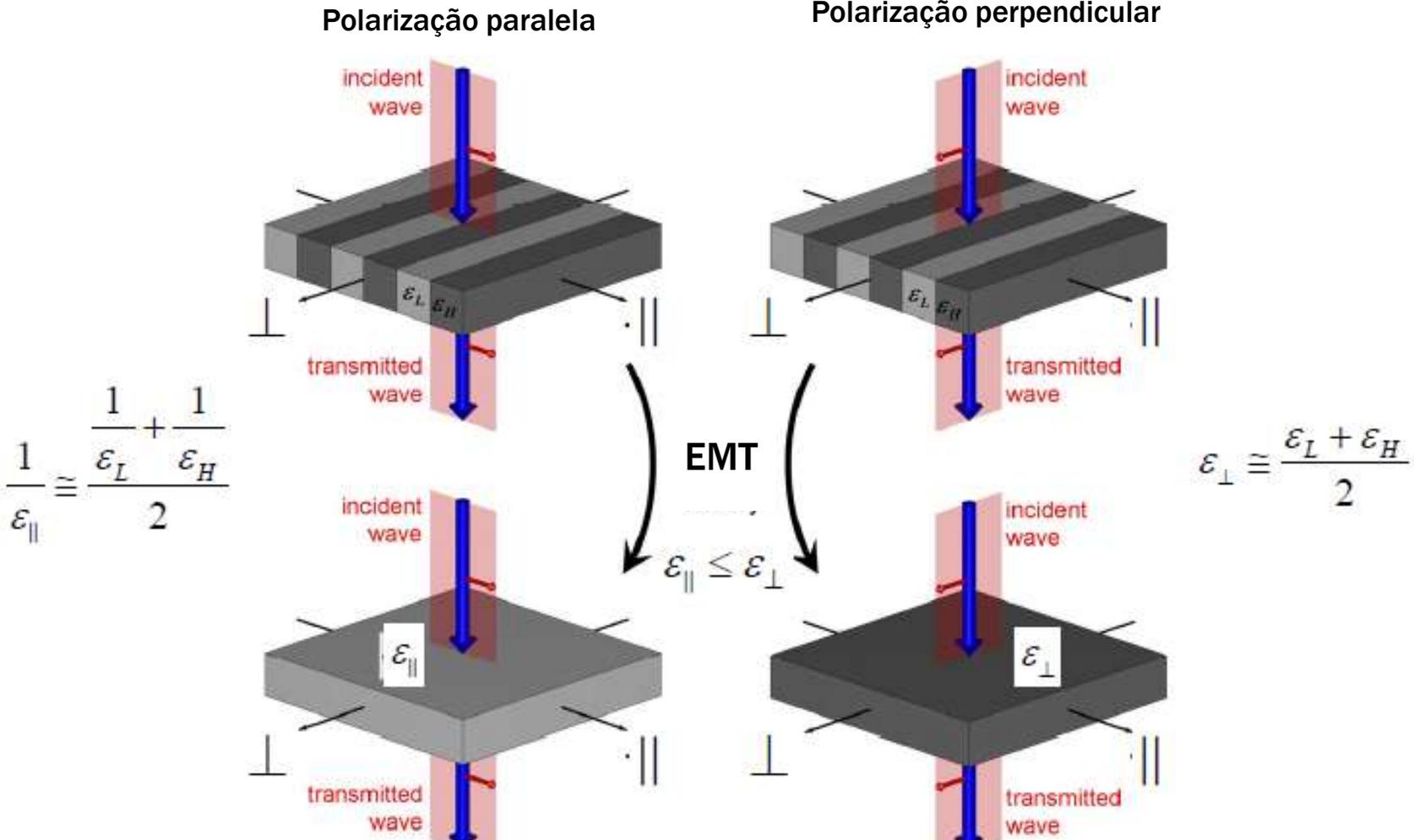
- A toda estrutura que seja grande em relação ao comprimento do campo EM incidente (hipótese macroscópica) pode ser atribuída um material homogêneo e contínuo equivalente, cujo comportamento é descrito pelas propriedades EM de permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ



Relação entre vetores



Conceito do EMT



Birrefringência de polarização

Equações simplificadas

$$\varepsilon_{\perp} \approx (1-f)\varepsilon_L + f\varepsilon_H$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \approx \frac{1-f}{\varepsilon_L} + \frac{f}{\varepsilon_H}$$

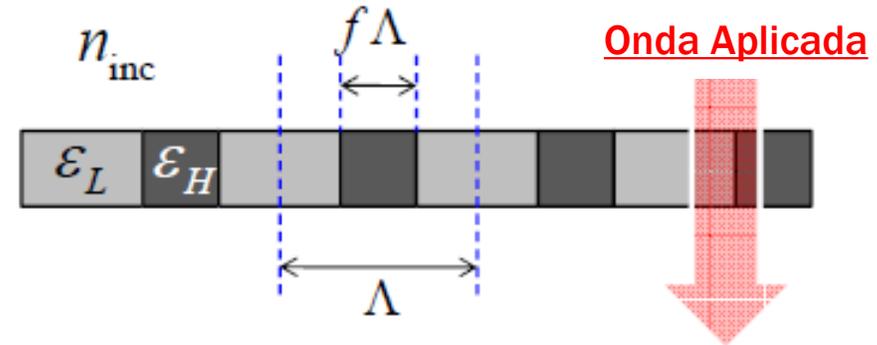
Equações de maior ordem

$$\varepsilon_{\perp} \approx \varepsilon_{\text{avg}} + \frac{(\Delta\varepsilon_r)^2}{2} \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2 + 2\beta^2 (\Delta\varepsilon_r)^2 \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^4$$

$$\varepsilon_{\text{avg}} = (\varepsilon_L + \varepsilon_H)/2$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_H - \varepsilon_L$$

$$\beta = n_{\text{inc}} \sin \theta_{\text{inc}}$$

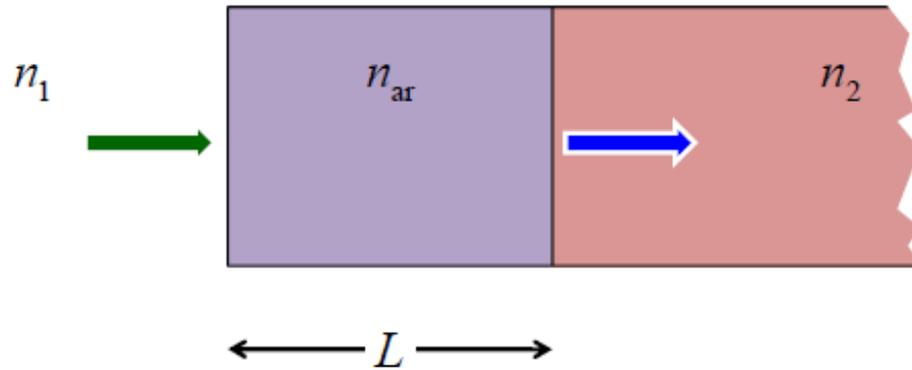


Para equações de maior precisão veja:

P. Lalanne, J. Hugonin, "High-order effective-medium theory of subwavelength gratings in classical mounting: application to volume holograms," J. Opt. Soc. Am. A 15(7), 1843–1851 (1998).

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

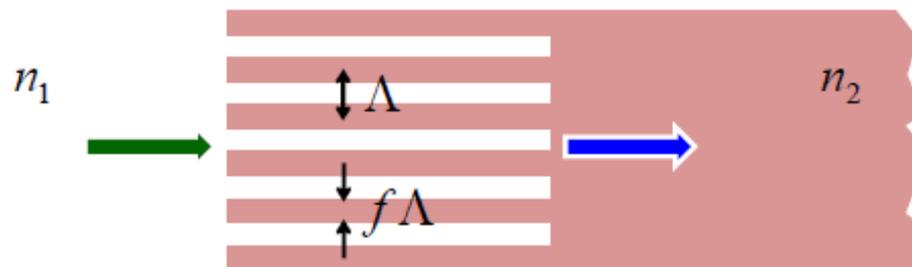
Redes antirreflexivas



Equações de Projeto

$$n_{\text{ar}} = \sqrt{n_1 n_2}$$

$$L = \lambda_0 / (4n_{\text{ar}})$$



Equações de Projeto

$$n_{\text{ar}} = \sqrt{n_1 n_2}$$

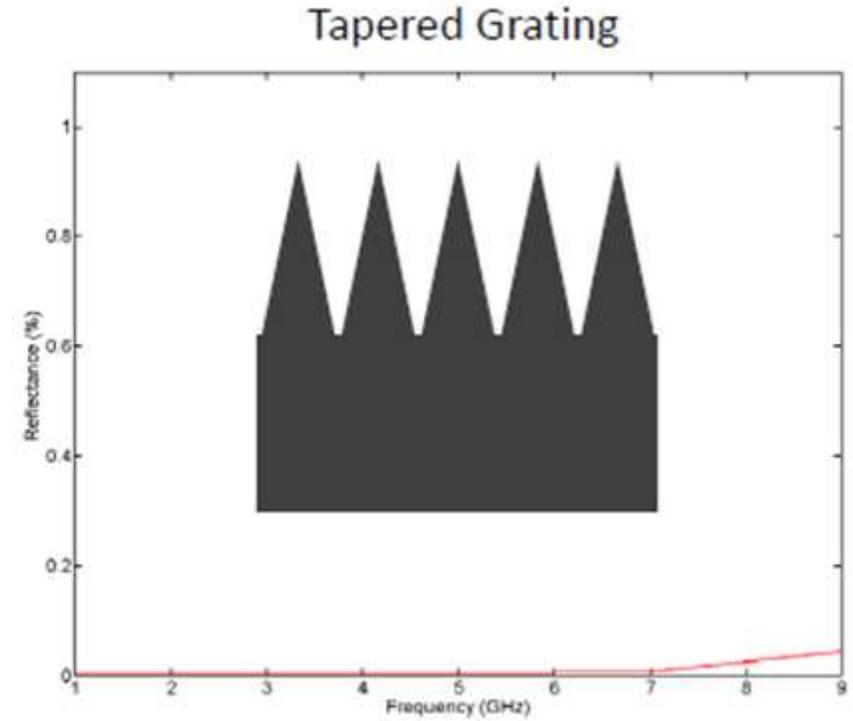
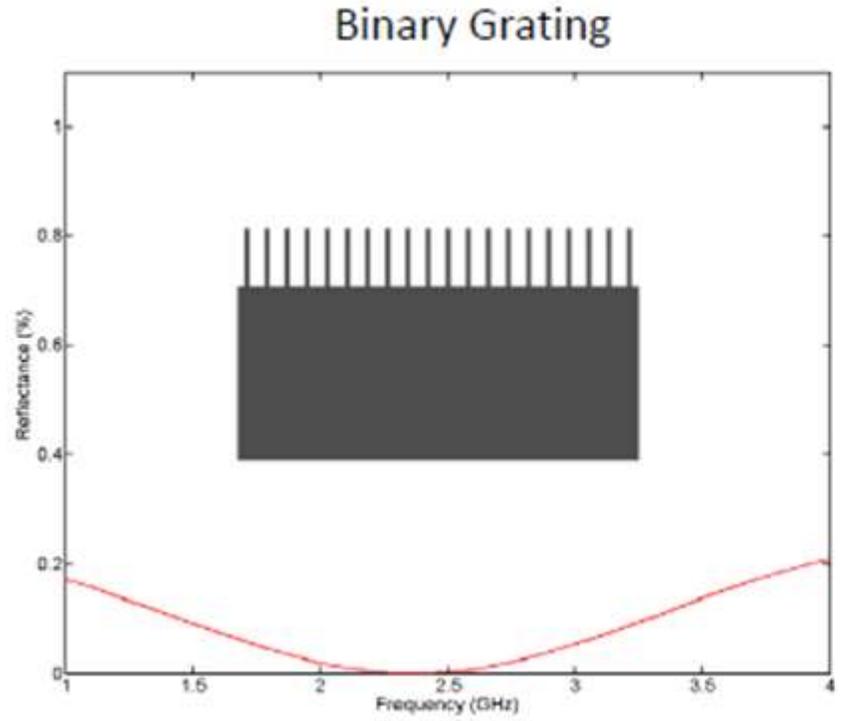
$$\Lambda < \lambda / 10$$

$$f_{\perp} = (n_{\text{ar}}^2 - n_1^2) / (n_2^2 - n_1^2)$$

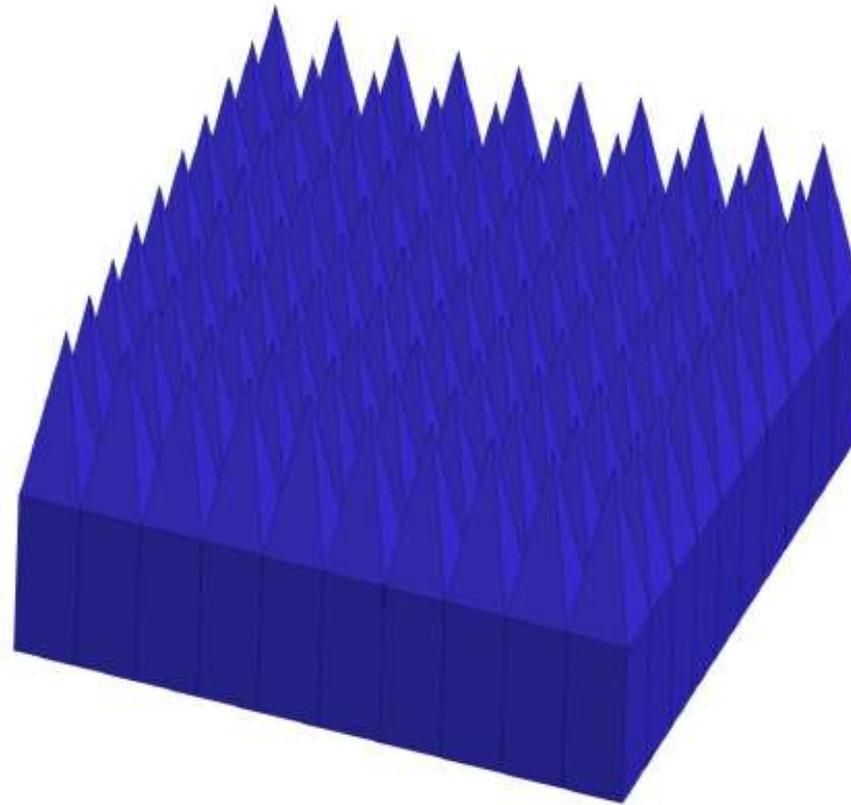
$$f_{\parallel} = \left(\frac{1}{n_{\text{ar}}^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) / \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$$L = \lambda_0 / (4n_{\text{ar}})$$

Redes antirreflexivas de banda larga



Rede antirreflexiva independente da polarização



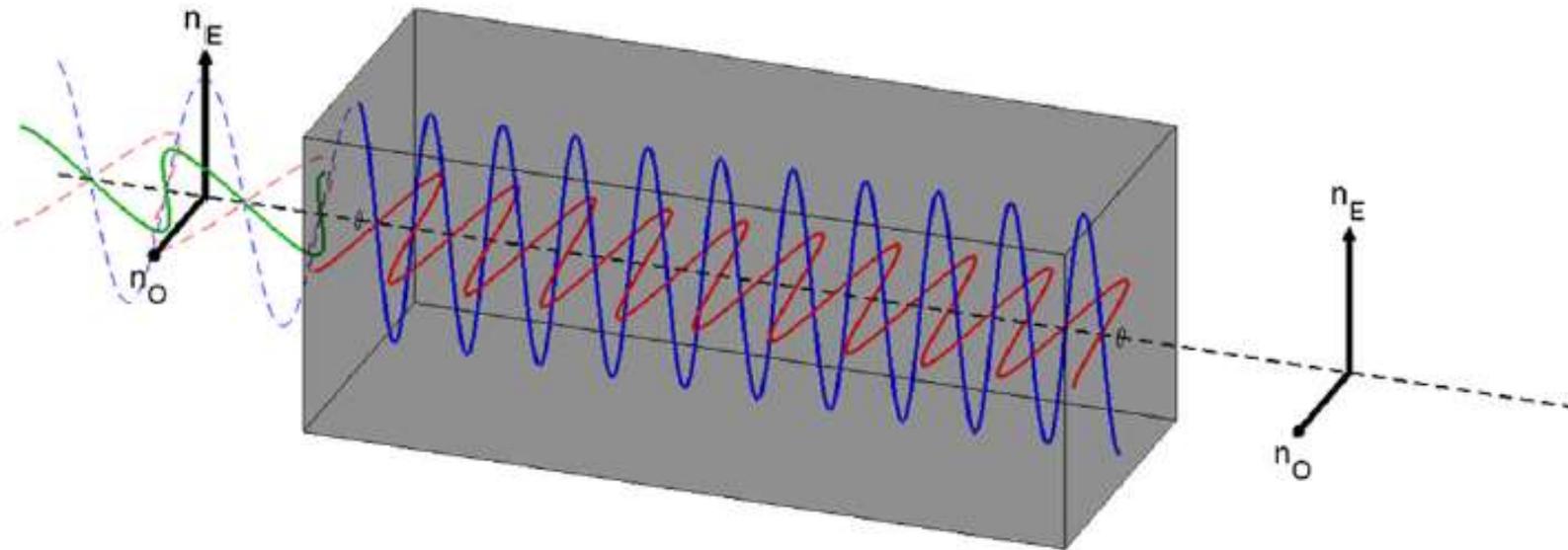
PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

Placas de Onda (Birrefringência)

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

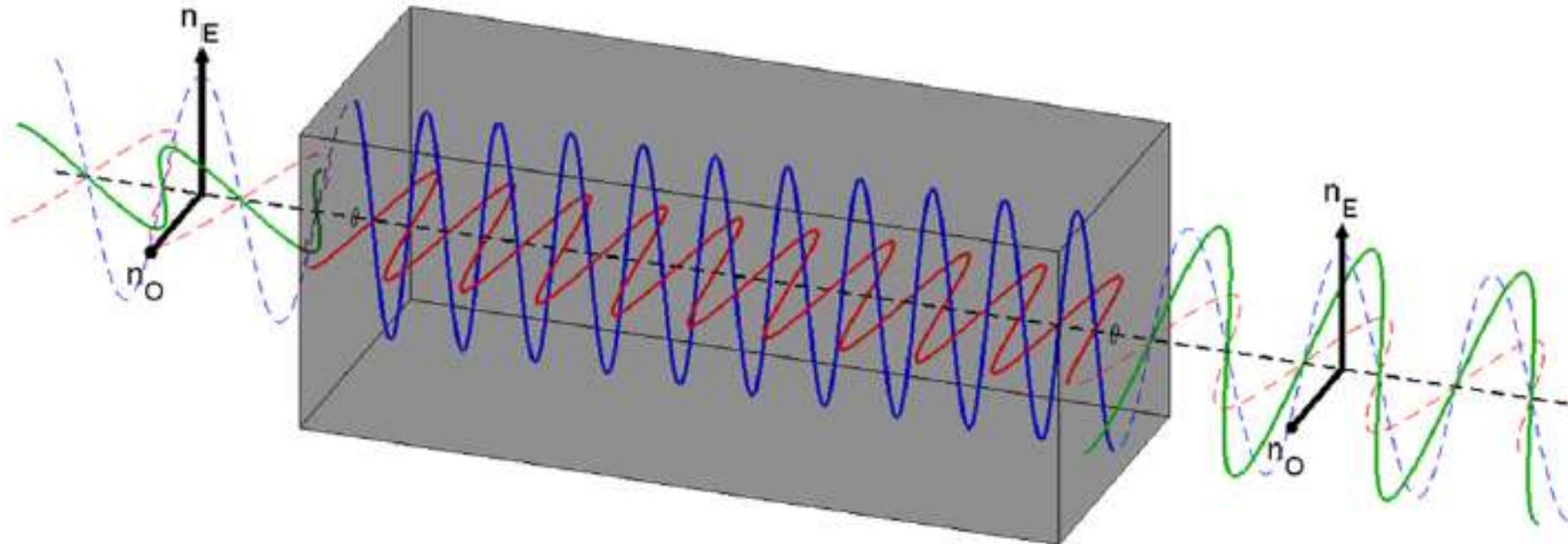
Propagação através de meio birrefringente

- Um dispositivo birrefringente é aquele que apresenta índices de refração diferentes para diferentes polarizações
- Vamos excitar um meio birrefringente com uma onda plana linearmente polarizada a 45 graus

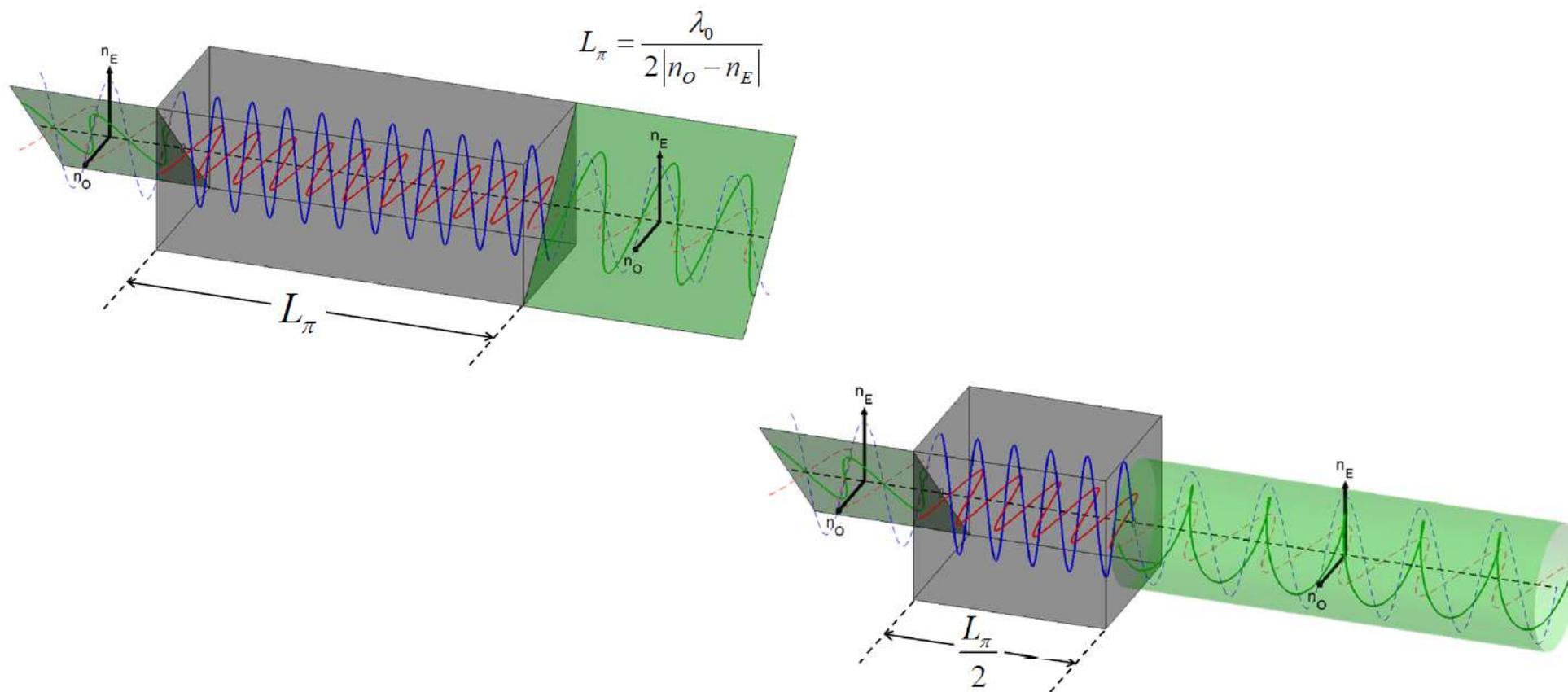


Uma nova polarização é formada na saída

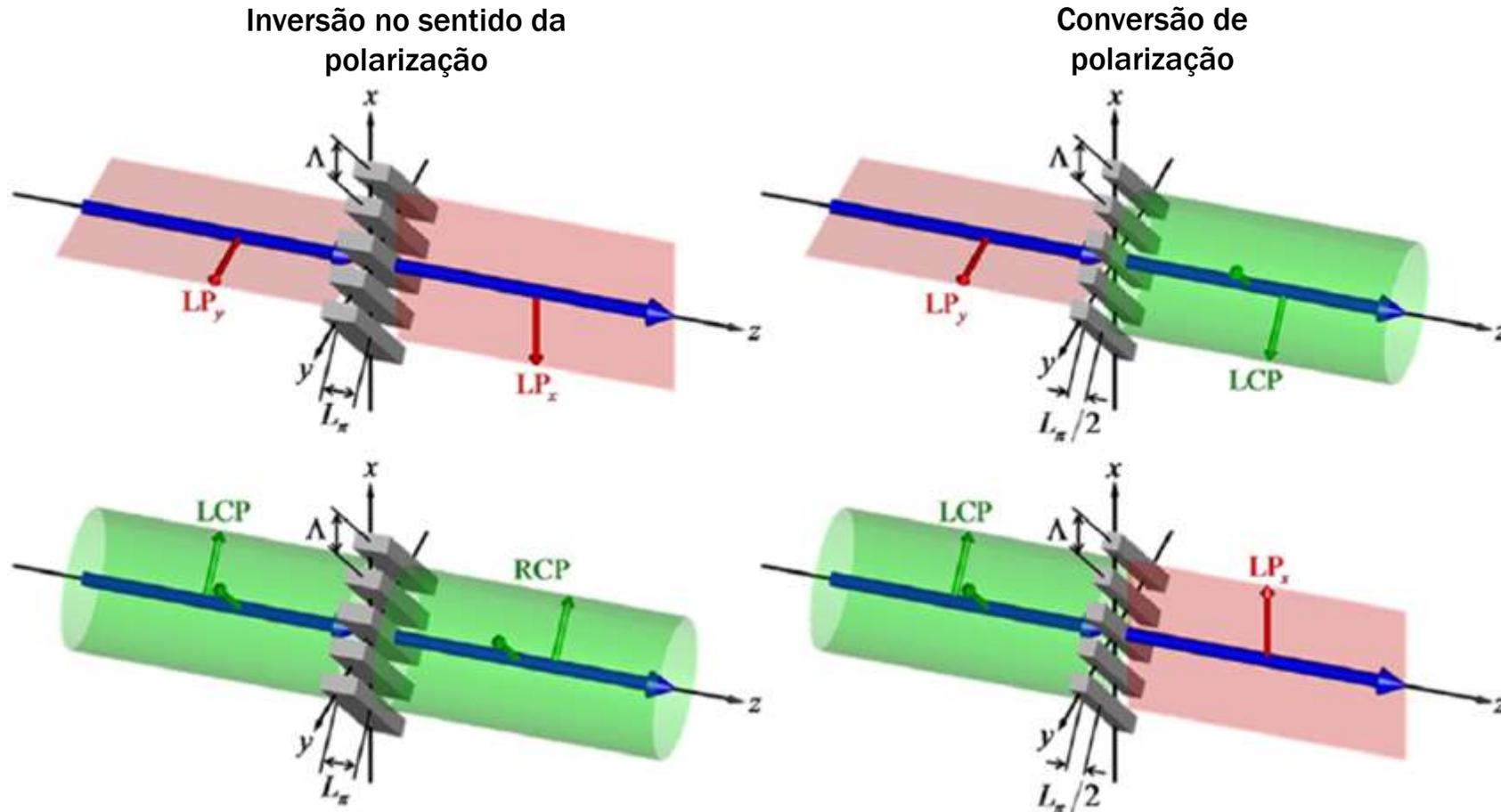
- Cada componente da polarização se propaga com uma velocidade diferente provocando um defasamento entre elas



Placas de meia onda e de quarto de onda

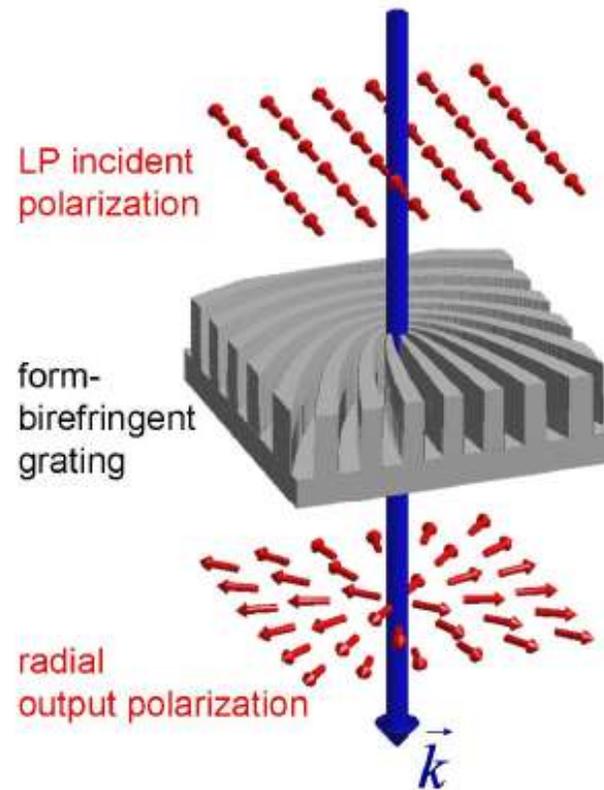


Redes de sub-comprimento de onda podem funcionar como placas de onda artificiais

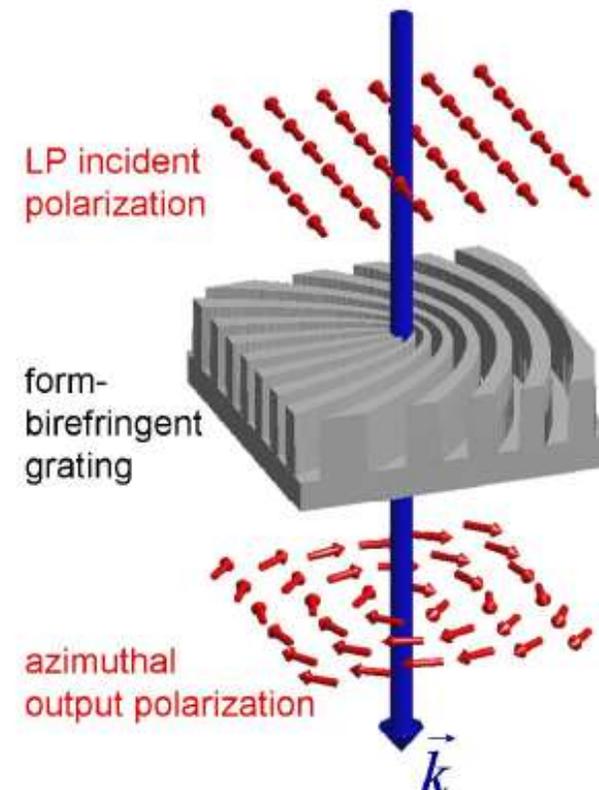


Dispositivos de forma de birrefringência contínuas

Polarização radial



Polarização azimutal



**Obrigado pela atenção!
Até a próxima aula...**