



Introdução aos metamateriais eletromagnéticos

Prof. Dr. Gláucio Lima Siqueira

I²META

Instituto de Inovação
em Meta

PROPRIEDADE DE GLÁUCIO LIMA SIQUEIRA E JORGE VIRGILIO DE ALMEIDA

Apresentação por Jorge Virgílio de Almeida

Informações gerais

- Contato
 - glaucio@cetuc.puc-rio.br
- Dia e horário do curso
 - Sextas-feiras, de 09h às 12h
 - Sala 3 do CETUC
- Avaliação
 - Lista de exercícios
 - Projeto final
- Referência Bibliográfica
 - ELE5322 21st Century Electromagnetics, Dr. Raymond C. Rumpt, UTEP, USA
 - <http://emlab.utep.edu/ee5390em21.htm/>

Ementa (I)

- **Parte 1 – Eletrodinâmica em meios periódicos**
 - Tópico 1 – Revisão do eletromagnetismo clássico
 - Tópico 2 – Modelos de Drude e Lorentz para condutores e dielétricos
 - Tópico 3 – Propagação da onda eletromagnética em meios anisotrópicos e não lineares
 - Tópico 4 – Teoria dos modos acoplados
 - Tópico 5 – Teoria das estruturas periódicas
 - Tópico 6 – Redes de difração
 - Tópico 7 – Ressonância do modo guiado
 - Tópico 8 – Teoria dos metamateriais

Ementa (II)

- **Parte 2 – Fenômeno e aplicações de metamateriais**
 - **Tópico 9 – Homogeneização de estruturas periódicas**
 - **Tópico 10 – Eletromagnetismo transformacional aplicado aos metamateriais**
 - **Tópico 11 – Ondas de superfície**
 - **Tópico 12 – Ondas lentas**
 - **Tópico 13 – Linha de transmissão orientada à esquerda**
 - **Tópico 14 – Aplicações de metamateriais**

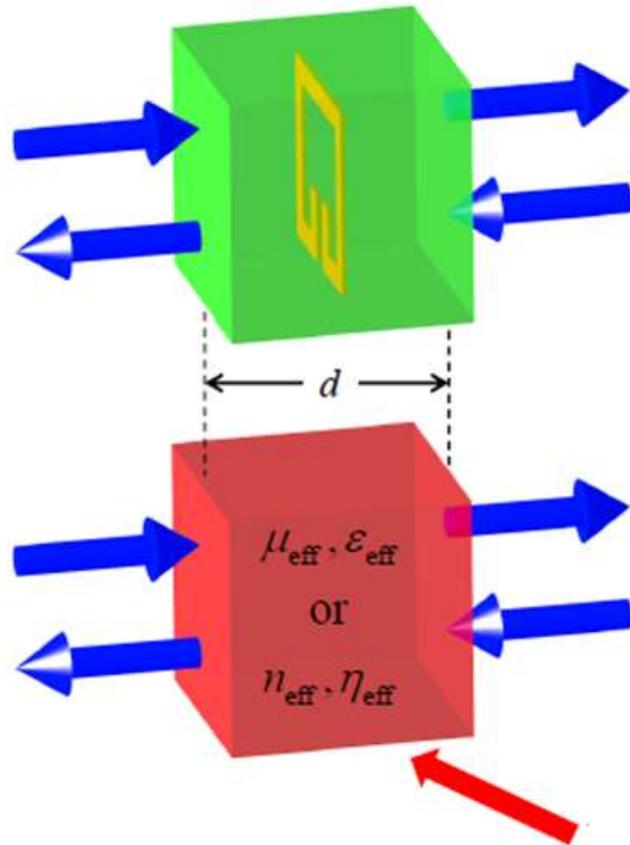
Tópico 9

Homogeneização de estruturas periódicas

- Introdução
- Método de Nicholson-Ross-Weir
- Homogeneização por campos médios
- Recuperação de parâmetros em baixas frequências
- Recuperação do índice de refração através da resposta de fase

Introdução

O que é homogeneização?



Uma placa de metamaterial produz uma resposta complexa de reflexão e transmissão

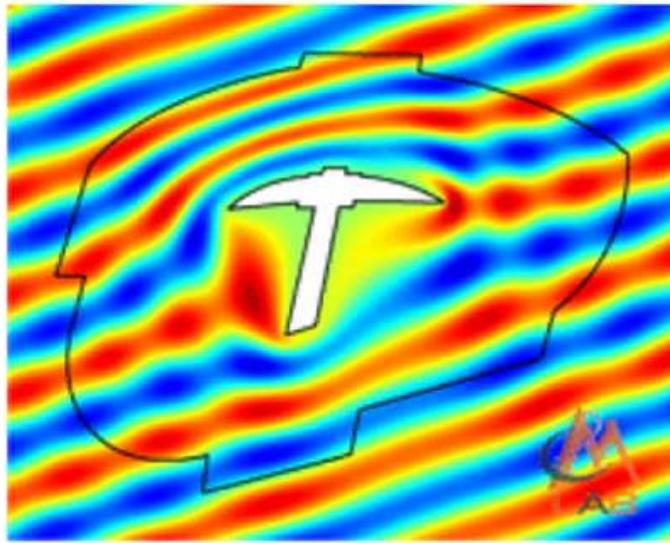
Uma placa homogeneizada de mesma espessura produz a mesma resposta complexa de reflexão e transmissão

Estas são as propriedades materiais efetivas, ou homogeneizadas, de um metamaterial

Utilidade da homogeneização

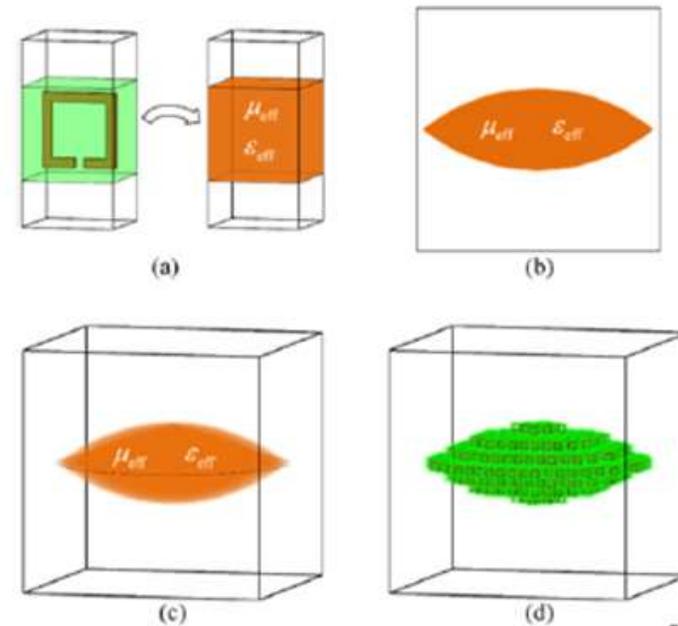
#1

Conhecer as propriedades efetivas permite a você realizar projetos ousados, como aqueles de transformação espacial

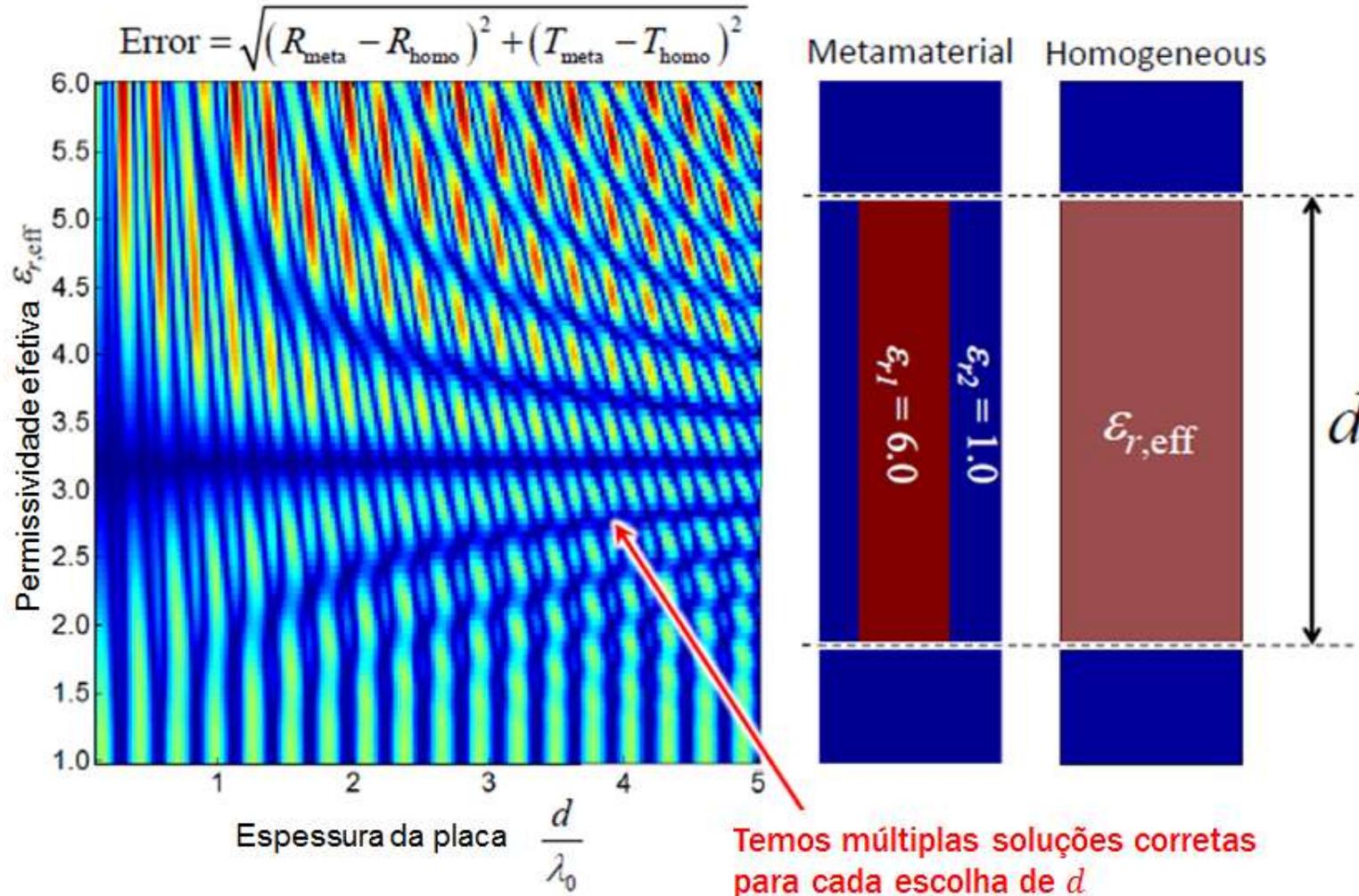


#2

Simulações preliminares usando apenas as propriedades efetivas são mais eficientes porque elas não precisam de uma malha tão refinada



O Problema → Ramificação



Graus de liberdade

- Um material é geralmente caracterizado tanto pelas permissividade e permeabilidade complexas como pelo índice de refração e impedância

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$$

$$\eta = \eta' + j\eta''$$

$$\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$$

$$n = n' + jn''$$

- Vemos que quatro números reais são necessários para descrever completamente o material
- Por essa razão, quatro medições são necessárias de modo a calcular completamente as propriedades do material

$$S_{11} = \text{Re}[S_{11}] + j \text{Im}[S_{11}]$$

$$S_{21} = \text{Re}[S_{21}] + j \text{Im}[S_{21}]$$

Outras combinações possíveis incluem medições em diferentes polarizações, ângulos diferentes, etc

Notas

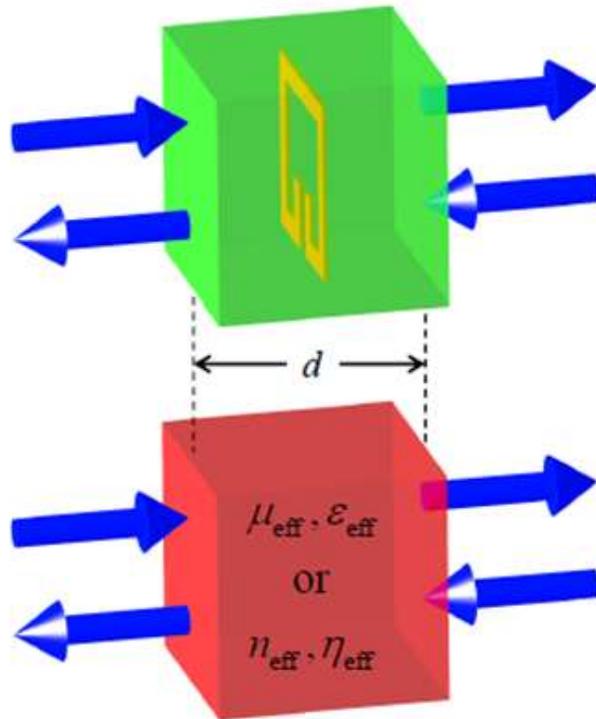
- São complicadas devido aos problemas de ramificação (funções complexas)
- Não existe o “melhor” método
- Não funciona muito bem para dispositivos longitudinalmente ressonantes
- Homogeneização nem sempre se aplica a cristais fotônicos que difratam e espalham ondas

Método de Nicholson-Ross-Weir (NRW)

Referências sobre NRW

1. T. L. Blakney, W. B. Weir, "Comments on "Automatic measurement of complex dielectric constant and permeability at microwave frequencies," Proceedings of the IEEE, vol.63, no.1, pp.203-205, Jan. 1975.
2. A. M. Nicolson, G. F. Ross, "Measurement of the Intrinsic Properties of Materials by Time-Domain Techniques," IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol.19, no.4, pp.377-382, Nov. 1970.
3. A. N. Vicente, et al., "The Step by Step Development of NRW Method," Microwave & Optoelectronics Conference (IMOC), 2011 SBMO/IEEE MTT-S International, pp.738-742, Oct. 29, 2011.
4. W. B. Weir, "Automatic measurement of complex dielectric constant and permeability at microwave frequencies," Proceedings of the IEEE, vol.62, no.1, pp.33-36, Jan. 1974.

Conceitos básicos de obtenção dos parâmetros S



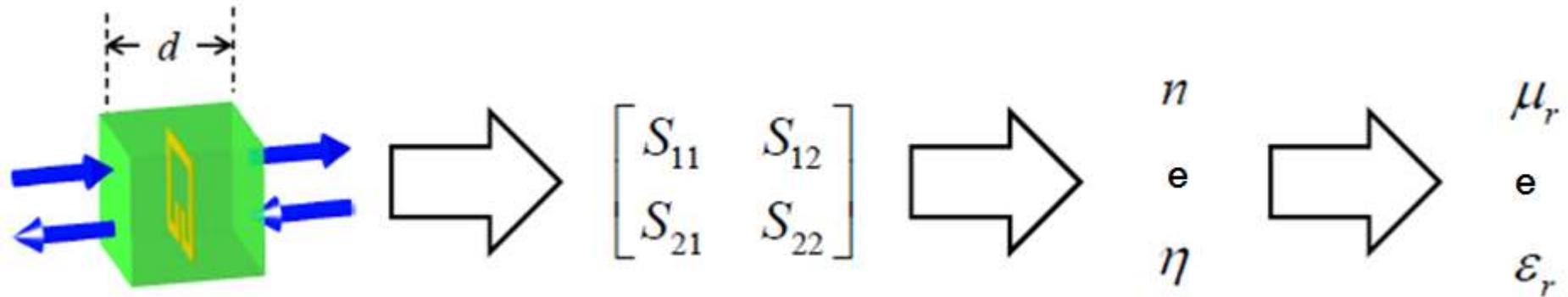
$$S_{IH} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(ih)} & S_{12}^{(ih)} \\ S_{21}^{(ih)} & S_{22}^{(ih)} \end{bmatrix}$$

$$S_{IH} = S_H$$

$$S_H = \begin{bmatrix} S_{11}^{(h)} & S_{12}^{(h)} \\ S_{21}^{(h)} & S_{22}^{(h)} \end{bmatrix}$$

É possível conceitualmente substituir uma estrutura não homogênea por uma estrutura homogênea contínua sem mudar as características de espalhamento (magnitude e fase da reflexão e da transmissão)

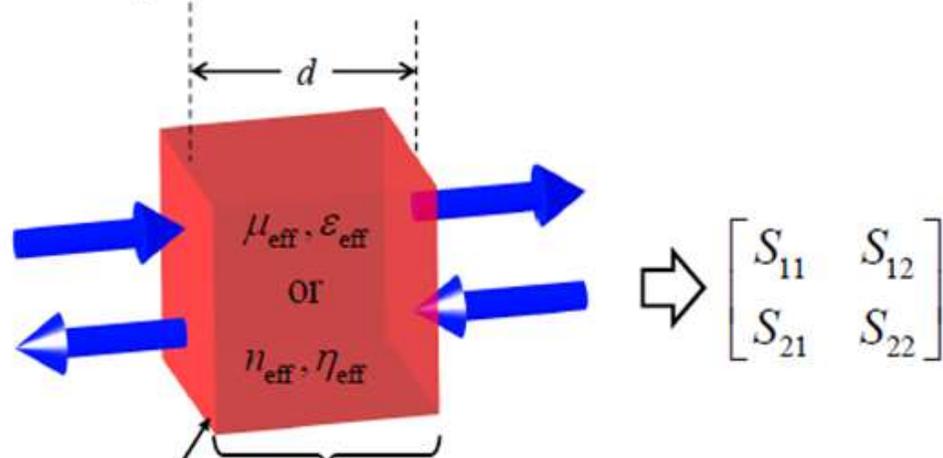
Fluxo de obtenção dos parâmetros



- Os parâmetros de espalhamento ou são medidos ou modelados
- Dos parâmetros de espalhamento, o índice de refração complexo e a impedância são calculados. Esse é um passo complicado
- Finalmente, a permissividade e permeabilidade complexas são calculadas

Análise do espalhamento

Espalhamento em uma interface



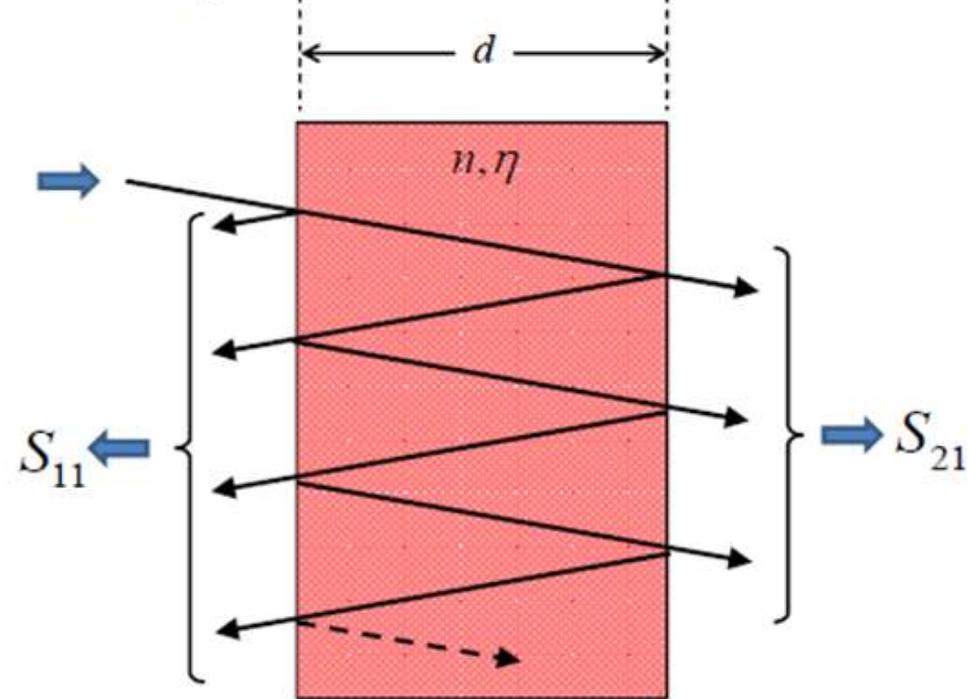
Reflexão da primeira interface:

$$r = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0}$$

Coefficiente de transmissão através da placa:

$$t = e^{jk_0nd}$$

Espalhamento na célula unitária



A reflexão total é a soma de todas as ondas refletidas. A transmissão total é a soma de todas as ondas transmitidas. Estas somas são séries geométricas que podem ser escritas numa forma fechada com somatórios.

Inversão das equações

- Para a obtenção dos parâmetros, começamos formulando nosso algoritmo pela inversão das equações para resolver r e t

$$S_{11} = \frac{(1-t^2)r}{1-r^2t^2}$$

$$S_{21} = \frac{(1-r^2)t}{1-r^2t^2}$$

$$r = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0}$$

$$t = e^{jk_0nd}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{r, t \rightarrow S_{11}, S_{21}}$$



$$X = \frac{1 - S_{21}^2 + S_{11}^2}{2S_{11}}$$

$$r = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$$

$$t = \frac{S_{11} + S_{21} - r}{1 - (S_{11} + S_{21})r}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{S_{11}, S_{21} \rightarrow r, t}$$

(*)
A escolha entre \pm deve ser feita de modo que $|r| \leq 1$

O método NRW

$$r = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} \rightarrow \eta = \eta_0 \frac{1+r}{1-r}$$

(*) ramificação!

$$t = e^{jk_0nd} \rightarrow n = \frac{\ln t}{jk_0d}$$

$$\ln(e^{jk_0nd}) = j(k_0nd + 2\pi m)$$

Weir assume que m é o maior inteiro menor que $\frac{d}{\lambda}$

Ex.: $\frac{d}{\lambda} = 0,25 \quad m = 0$

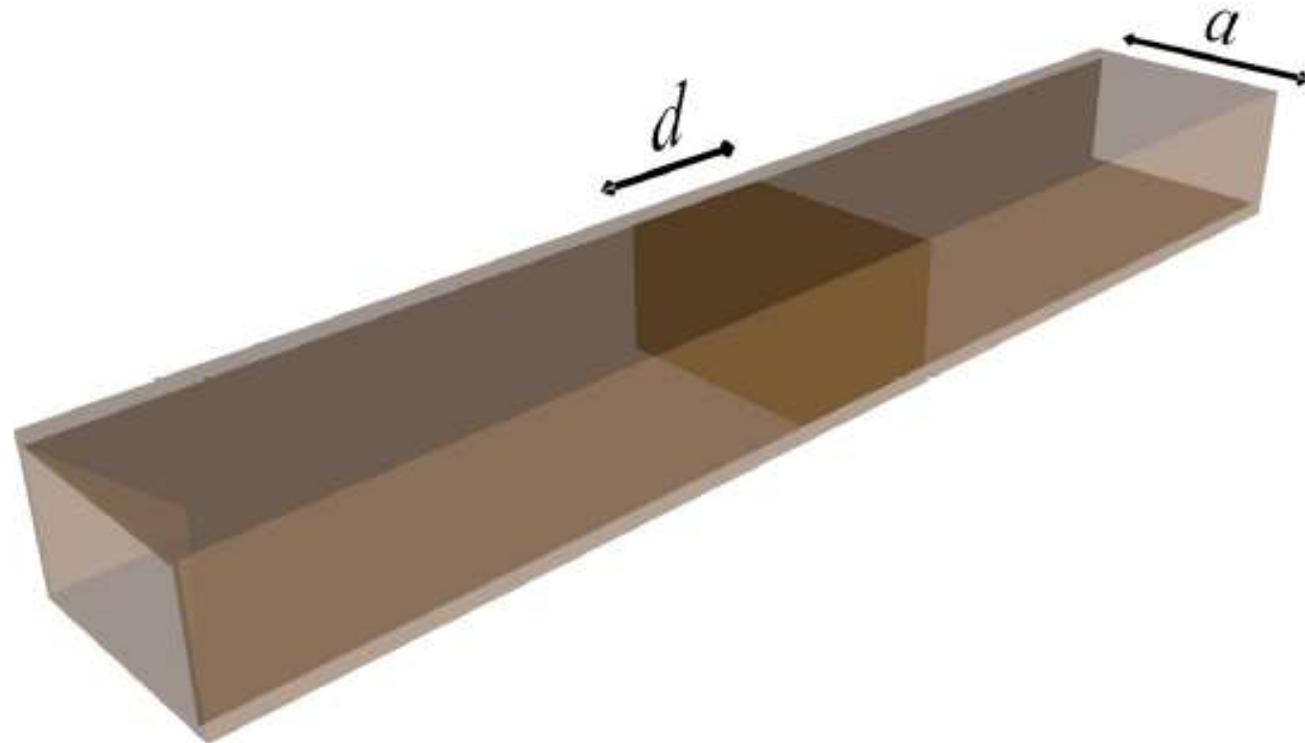
$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \rightarrow \mu_r = n \frac{\eta}{\eta_0}$$

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \rightarrow \epsilon_r = n \frac{\eta_0}{\eta}$$

Senos e cossenos são os mesmos quando somamos ou subtraímos múltiplos de 2π ao ângulo. Isto é chamado "ramificação" e significa um número infinito de soluções

Arranjo para medidas em guias de onda

- Weir modificou o método de Nicholson-Ross para extrair as propriedades do material a partir de medidas de amostras dentro de guias de onda



Modificações de Weir

- Um guia de onda é uma linha de transmissão que possui um comprimento de onda de corte. O comprimento de onda guiado é dado por:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}} = \frac{\ln t}{j2\pi d}$$

com:

$$\lambda_c = 2a$$

$a \equiv$ maior dimensão do guia

- Nossas equações para μ_r e ϵ_r se tornam:

$$\mu_r = \frac{1}{\lambda_g} \left(\frac{1+r}{1-r} \right) / \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}}$$

e

$$\epsilon_r = \frac{\lambda_0^2}{\mu_r} \left(\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \right)$$

Homogeneização por campos médios (HCM)

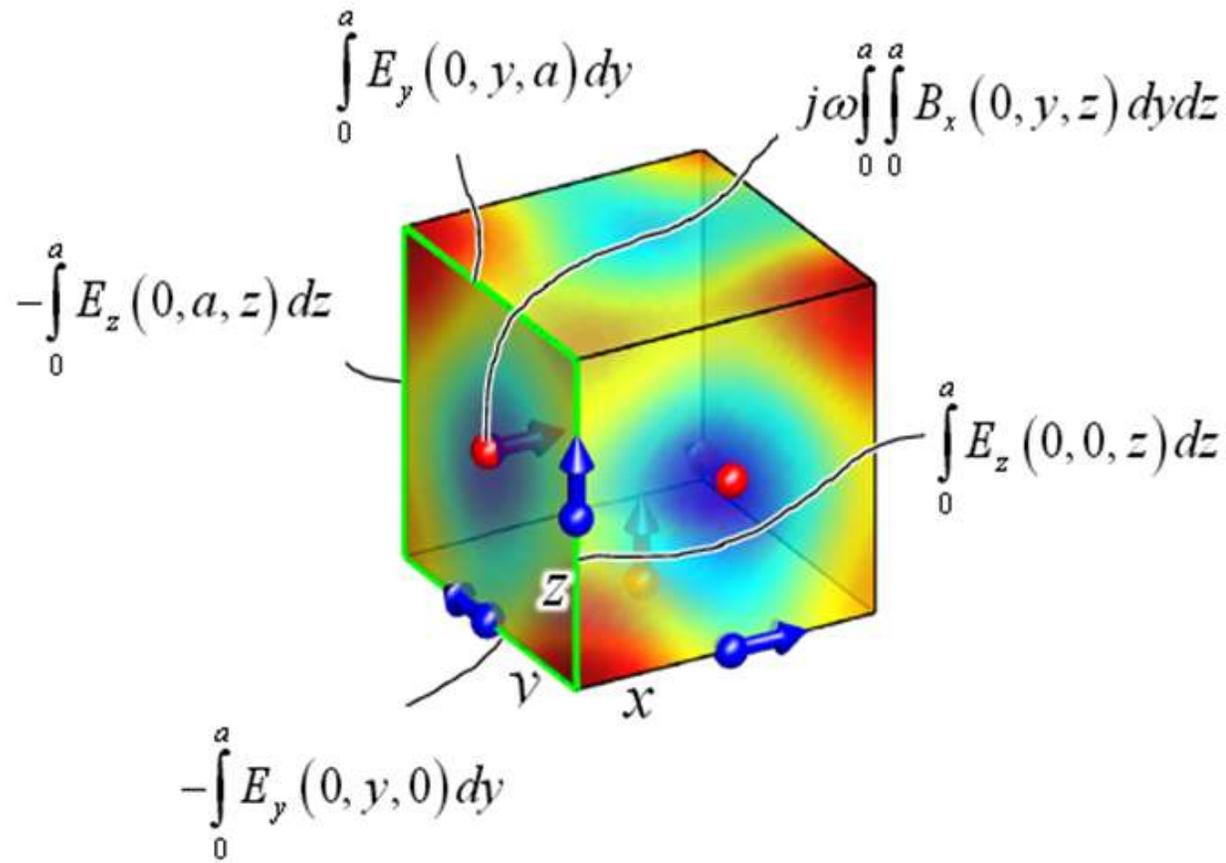
Referências sobre HCM

1. D. R. Smith, J. B. Pendry, "Homogenization of metamaterials by field averaging," J. Opt. Soc. Am. B **23**, 391 (2006).

Vantagens e desvantagens

- Vantagens
 - Resolve facilmente o problema de ramificação
 - Precisão
- Desvantagens
 - Computacionalmente mais intensivo
 - Requer essencialmente uma simulação

Passo a passo



Passos:

1. Dado o vetor de Bloch podemos calcular os campos em toda a célula unitária
2. Os valores médios dos campos são calculados nos pontos correspondentes da grade Yee
3. Os parâmetros efetivos dos materiais são extraídos das relações constitutivas usando as quantidades médias
4. As propriedades efetivas do material são calculadas dos parâmetros efetivos removendo a dispersão da grade

Interpretando os termos

- Podemos agora definir as quantidades “médias”

$$\underbrace{\int_0^a E_z(0,0,z) dz}_{\bar{E}_z\left(0,0,\frac{a}{2}\right)} - \underbrace{\int_0^a E_z(0,a,z) dz}_{\bar{E}_z\left(0,a,\frac{a}{2}\right)} - \underbrace{\int_0^a E_y(0,y,0) dy}_{\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},0\right)} + \underbrace{\int_0^a E_y(0,y,a) dy}_{\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},a\right)} = j\omega \underbrace{\int_0^a \int_0^a B_x(0,y,z) dy dz}_{\bar{B}_x\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)}$$

$\bar{E}_z\left(0,0,\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{a} \int_0^a E_z(0,0,z) dz$
 $\bar{E}_z\left(0,a,\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{a} \int_0^a E_z(0,a,z) dz$
 $\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},0\right) = \frac{1}{a} \int_0^a E_y(0,y,0) dy$
 $\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},a\right) = \frac{1}{a} \int_0^a E_y(0,y,a) dy$

$\bar{B}_x\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a B_x(0,y,z) dy dz$

Tomamos as médias de \mathbf{E} pelas integrais de linha

Tomamos as médias de \mathbf{B} pela integral de superfície

O rotacional em termos dos campos médios

$$a\bar{E}_z\left(0,0,\frac{a}{2}\right) - a\bar{E}_z\left(0,a,\frac{a}{2}\right) - a\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},0\right) + a\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},a\right) = j\omega a^2 \bar{B}_x\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$



$$\frac{\bar{E}_z\left(0,0,\frac{a}{2}\right) - \bar{E}_z\left(0,a,\frac{a}{2}\right)}{a} - \frac{\bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},0\right) - \bar{E}_y\left(0,\frac{a}{2},a\right)}{a} = j\omega \bar{B}_x\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

Esta equação é exatamente a mesma equação definida pelas diferenças finitas em uma grade Yee!!! Agora interpretamos a constante da rede como a resolução da grade

$$a = \Delta x = \Delta y = \Delta z$$

Calculando todos os campos médios

- Aplicamos este mesmo procedimento a todas as seis equações de Maxwell para encontrar equações envolvendo os campos médios
- Podemos observar que os campos médios são definidos exatamente nos mesmos pontos onde eles deveriam estar na grade Yee

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_x, \bar{E}_y, \text{ e } \bar{E}_z \\ \bar{H}_x, \bar{H}_y, \text{ e } \bar{H}_z \end{array} \right\} \text{ Calculados usando integrais de linha ao longo das arestas} \\ \text{onde as componentes do campo existem}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{D}_x, \bar{D}_y, \text{ e } \bar{D}_z \\ \bar{B}_x, \bar{B}_y, \text{ e } \bar{B}_z \end{array} \right\} \text{ Calculados usando integrais de superfície sobre as} \\ \text{superfícies onde as componentes do campo existem}$$

Relações constitutivas

- Para meios “bi”, as relações constitutivas são:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 [\bar{\varepsilon}_r] \vec{E} - \frac{j}{c_0} [\bar{\kappa}] \vec{H}$$



Como todas as quantidades do campo são agora conhecidas, podemos encontrar as propriedades do material a partir das relações constitutivas

$$\vec{B} = \frac{j}{c_0} [\bar{\kappa}]^T \vec{E} + \mu_0 [\bar{\mu}_r] \vec{H}$$

$[\bar{\varepsilon}_r] \equiv$ Tensor permissividade relativa médio

$[\bar{\mu}_r] \equiv$ Tensor permeabilidade relativa médio

$[\bar{\kappa}] \equiv$ Tensor magneto-elétrico médio

Dispersão em uma grade Yee

- Lembre-se da relação de dispersão para um material anisotrópico com parâmetros μ_r e ε_r

$$\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \mu_r \varepsilon_r = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$$

- A relação de dispersão análoga no domínio da frequência de uma grade Yee preenchida com μ_r e ε_r é:

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \bar{\mu}_r \bar{\varepsilon}_r = \left[\frac{2}{\Delta_x} \sin\left(\frac{\beta_x \Delta_x}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta_y} \sin\left(\frac{\beta_y \Delta_y}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta_z} \sin\left(\frac{\beta_z \Delta_z}{2}\right)\right]^2$$

- Nesta equação, a velocidade da luz c_0 é escrita como v porque a velocidade muda devido à dispersão na grade

Lembre-se que: $a = \Delta x = \Delta y = \Delta z$

Fator de compensação γ

- A equação de dispersão é resolvida para v

$$v = \omega \sqrt{\bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r} \sqrt{\left[\frac{2}{\Delta_x} \sin\left(\frac{\beta_x \Delta_x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta_y} \sin\left(\frac{\beta_y \Delta_y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta_z} \sin\left(\frac{\beta_z \Delta_z}{2}\right) \right]^2}$$

- Devido à dispersão na grade, v é ligeiramente menor que c_0

$$v = \gamma c_0$$

- Podemos calcular este fator combinando as equações acima:

$$\gamma = k_0 \sqrt{\bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r} \sqrt{\left[\frac{2}{\Delta_x} \sin\left(\frac{\beta_x \Delta_x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta_y} \sin\left(\frac{\beta_y \Delta_y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta_z} \sin\left(\frac{\beta_z \Delta_z}{2}\right) \right]^2}$$

Removendo a dispersão da grade

- Das relações constitutivas, podemos calcular as propriedades médias efetivas do material

$$[\bar{\mu}_r], [\bar{\varepsilon}_r], [\bar{\kappa}]$$

- Estes termos incorporam a dispersão da grade de Yee que deve ser removida para se recuperar as propriedades efetivas do meio

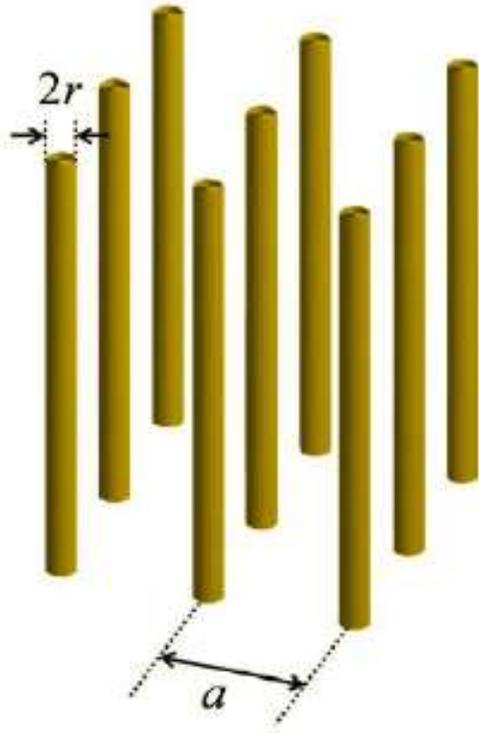
$$\begin{array}{l} [\bar{\mu}_r] \\ [\bar{\varepsilon}_r] \\ [\bar{\kappa}] \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} [\mu_{r,\text{eff}}] \\ [\varepsilon_{r,\text{eff}}] \\ [\kappa_{r,\text{eff}}] \end{array}$$

Para materiais dielétricos, a constante dielétrica média efetiva será ligeiramente maior do que a constante dielétrica efetiva verdadeira devido à dispersão.

Removemos a dispersão da grade da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{r,\text{eff}} = \gamma \bar{\varepsilon}_r$$

Exemplo 1: meio de condutores paralelos



$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \quad \text{Eq. (31)}$$

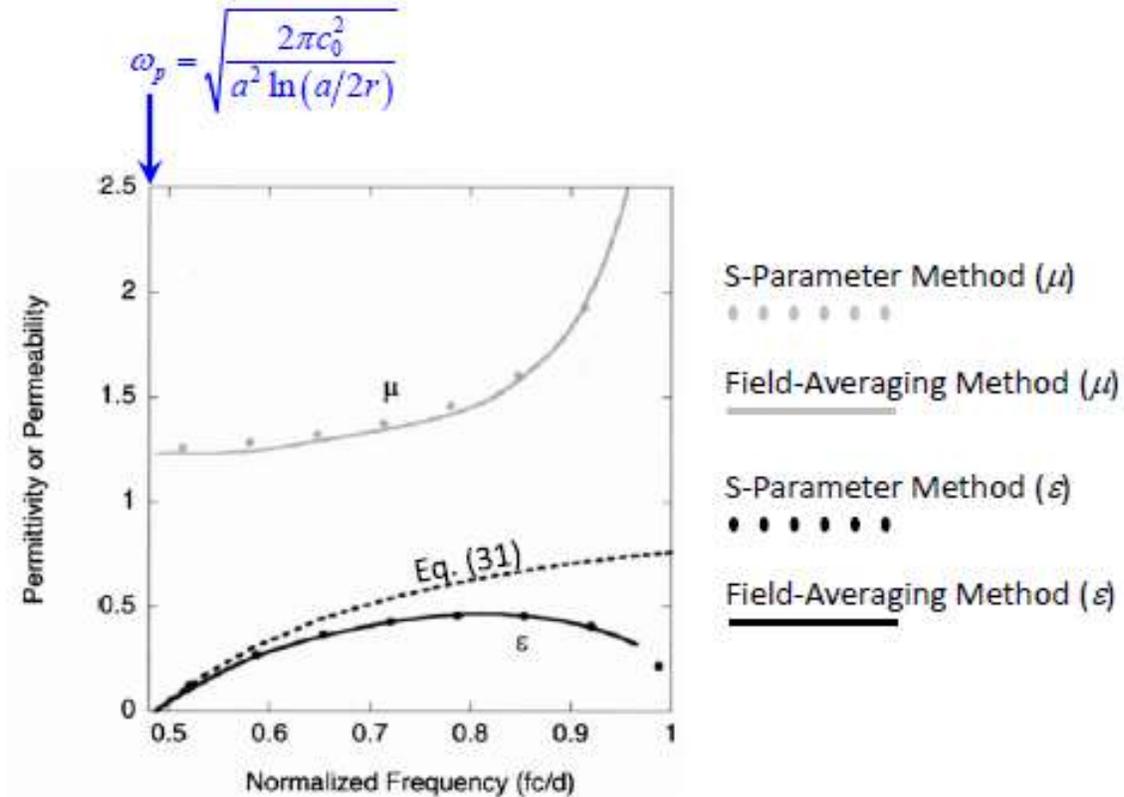


Fig. 5. Retrieved values of permittivity (black curve) and permeability (gray curve) for the wire lattice. Because there are no propagating modes below the plasma frequency, the curves begin at the plasma frequency. The dots correspond to an S-parameter retrieval performed on an S-parameter calculation of the unit cell. The dashed curve corresponds to the ideal form for a plasmonic medium, Eq. (31).

Exemplo 2: meio de ressonadores “split-ring” (SRR)

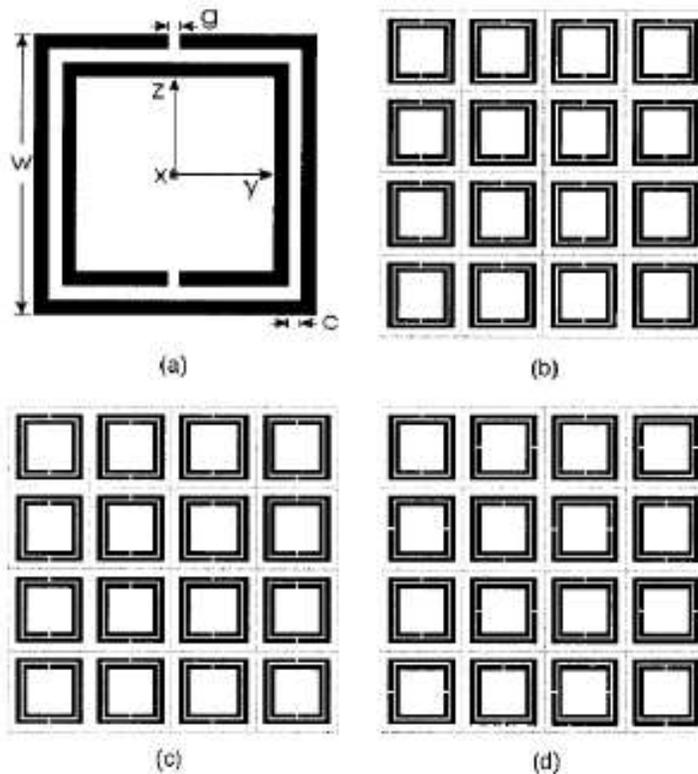


Fig. 6. (a) Diagram of the SRR and axes used in the simulations. $w=0.8d$, $t=g=0.04d$, and the linewidths are $0.08d$, where d is the unit-cell length. (b) SRRs arranged asymmetrically. A structure composed as shown exhibits electric, magnetic, and magnetoelectric resonant responses. (c) SRRs arranged symmetrically. The restoration of mirror plane symmetry along the z axis eliminates the magnetoelectric coupling. (d) This arrangement of SRRs reduces the resonant electric and magnetoelectric responses.

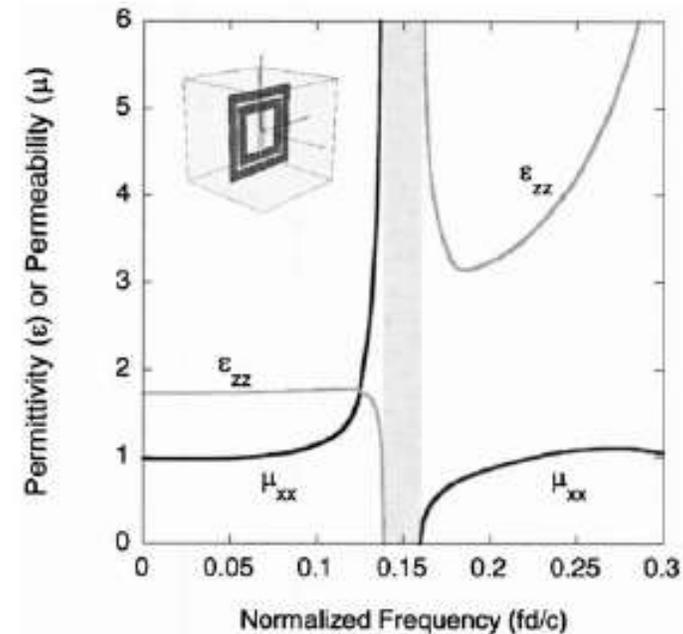
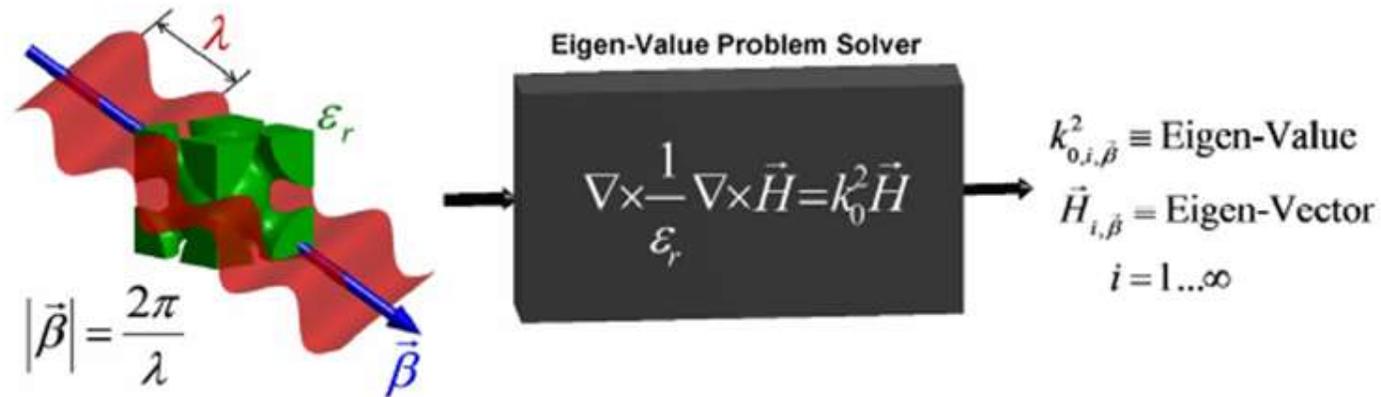


Fig. 8. Retrieved permittivity and permeability for the SRR medium, oriented for primarily magnetic response.

Recuperação de parâmetros em baixas frequências

Calculando propriedades efetivas usando aproximação por ondas planas (PWEM)

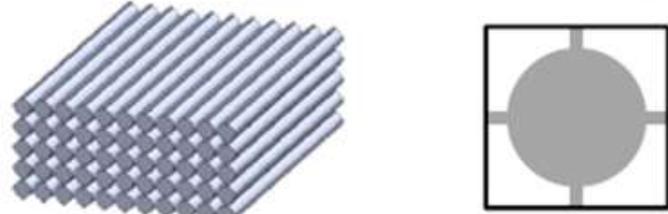
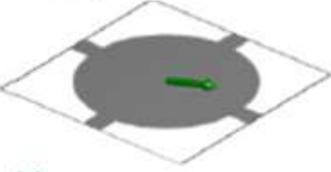
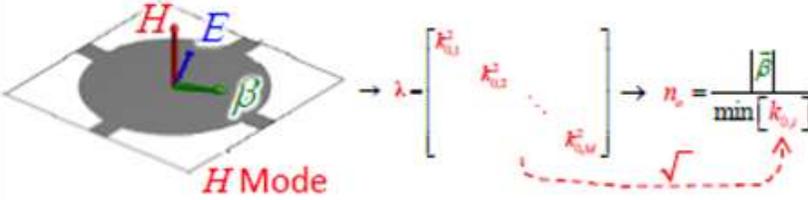
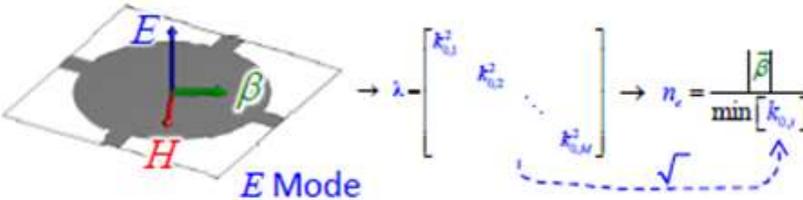


O índice de refração efetivo de uma estrutura periódica para um dado vetor de onda de Bloch é facilmente calculado a partir do vetor $\vec{\beta}$ e de sua frequência f_0

$$|\vec{\beta}| = k_0 n_{\text{eff}} \quad \longrightarrow \quad n_{\text{eff}} = \frac{|\vec{\beta}|}{k_0}$$

Nota: Esteja certo de usar $\vec{\beta}$ pequeno!

Procedimento simplificado para estruturas uniaxiais

<p>Passo 1 - Construir a célula unitária na grade</p> 	<p>Passo 2 - Definir um único e pequeno vetor de onda de Bloch em qualquer direção</p> $\vec{\beta} = 0.01\beta_{\max}\hat{x}$ $\beta_{\max} = \pi/a$ <p>Only a single $\vec{\beta}$ is needed here.</p> 
<p>Passo 3 - Calcular n_o do auto valor de ordem mais baixa do modo H</p>  <p>H Mode</p>	<p>Passo 4 - Calcular n_e do auto valor de ordem mais baixa do modo E</p>  <p>E Mode</p>
<p>Passo 5 - Montar o tensor</p> $[n] = \begin{bmatrix} n_o & 0 & 0 \\ 0 & n_o & 0 \\ 0 & 0 & n_e \end{bmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{bmatrix}$ $\varepsilon_o = n_o^2 \quad \varepsilon_e = n_e^2$	

Recuperação do índice de refração através da resposta de fase

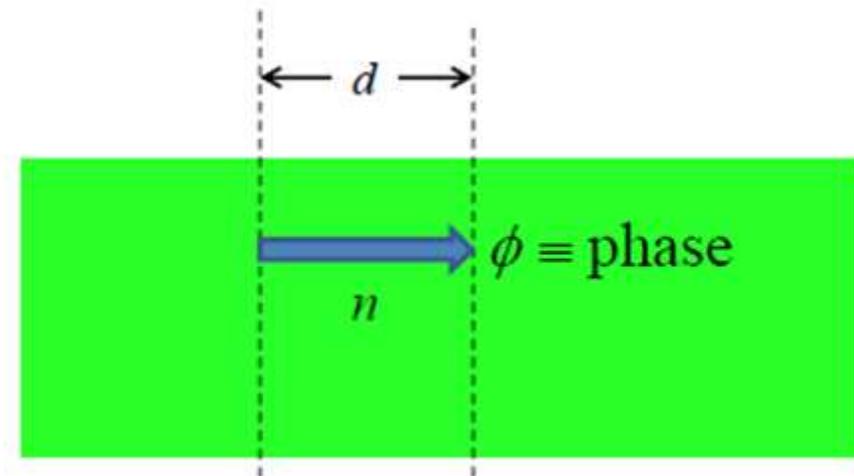
Passagem única da onda pelo material

- A fase de um onda que se acumula pela passagem através de um meio homogêneo de espessura d e índice de refração n é:

$$\phi = 2\pi \cdot \frac{d}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{nd}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} nd = k_0 nd$$

O problema é que a fase é limitada:

$$-\pi \leq \phi \leq \pi$$



- Assim, a fase modelada ou medida é, na realidade

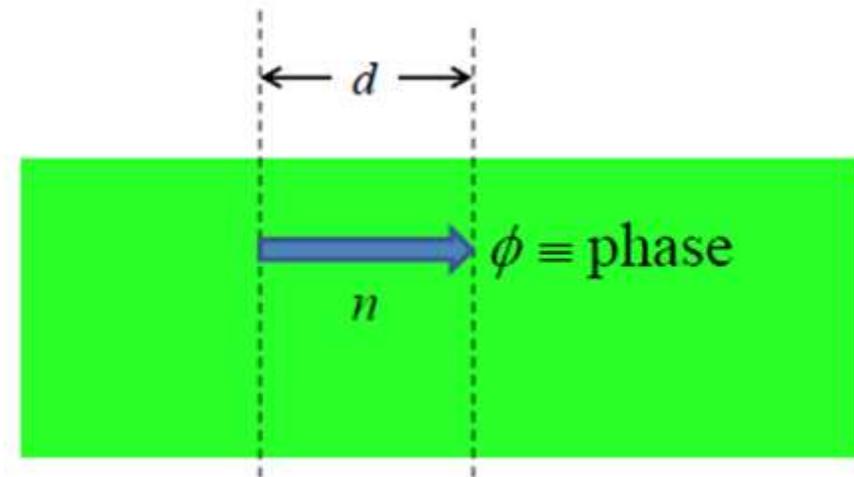
$$\phi = k_0 nd + m(2\pi) \quad m = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Inclinação da resposta de fase

- Podemos eliminar o problema com o termo $m(2\pi)$ diferenciando a equação com relação à frequência ou ao comprimento de onda

$$\phi = \frac{2\pi nd}{\lambda_0} + m(2\pi)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda_0} = \frac{2\pi nd}{\lambda_0^2}$$



- Podemos agora recuperar o índice de refração da inclinação da resposta de fase ao invés da resposta de fase propriamente dita

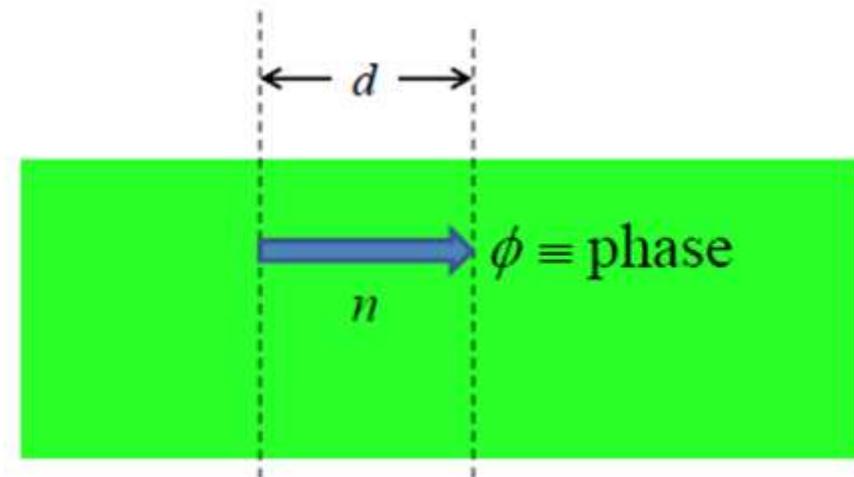
Sem o problema de ramificação!!!

$$n_{\text{eff}} = \frac{\lambda_0^2}{2\pi d} \frac{d\phi}{d\lambda_0}$$

Ou em termos da frequência

- A transmissão através do material que tem um índice de refração n produzirá uma fase dada por:

$$\begin{aligned}\phi &= k_0 n d + m(2\pi) \\ &= \frac{\omega}{c_0} n d + m(2\pi) \\ &= \frac{2\pi f}{c_0} n d + m(2\pi)\end{aligned}$$



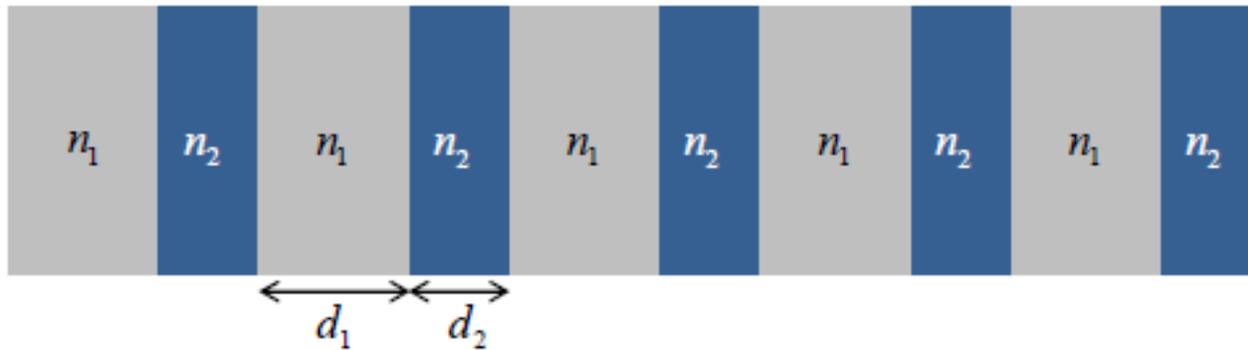
- A inclinação desta função é:

$$\frac{d\phi}{df} = \frac{2\pi n d}{c_0}$$

Podemos recuperar o índice de refração usando

$$n_{\text{eff}} = \frac{c_0}{2\pi d} \frac{d\phi}{df}$$

Exemplo: rede de Bragg



$$\lambda_{0,\text{Bragg}} = 1550 \text{ nm}$$

$$n_1 = 1.50$$

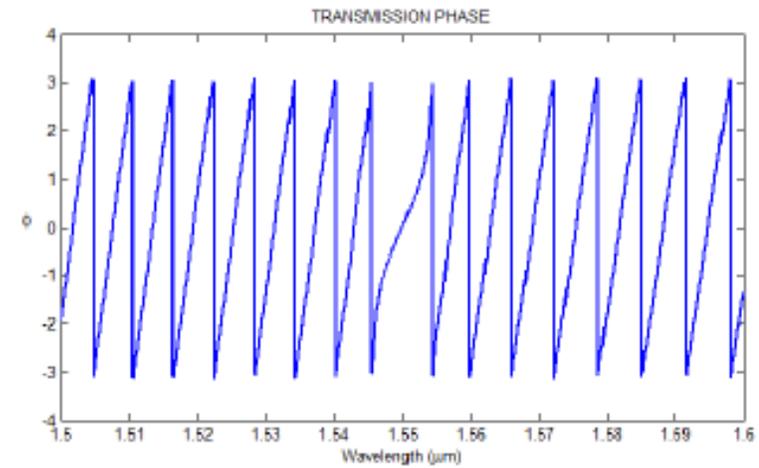
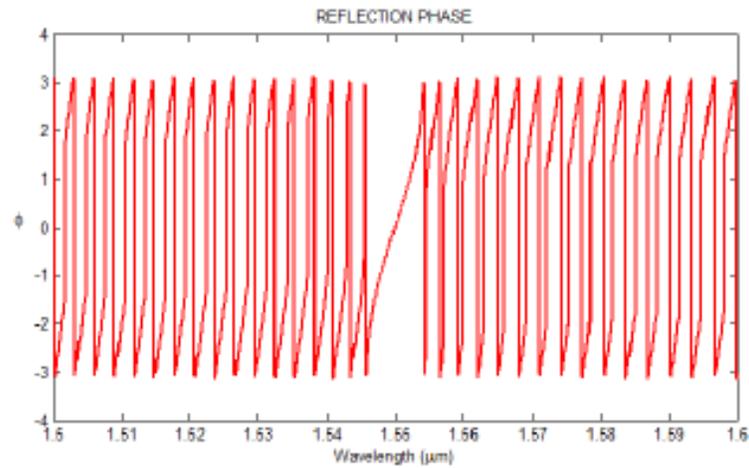
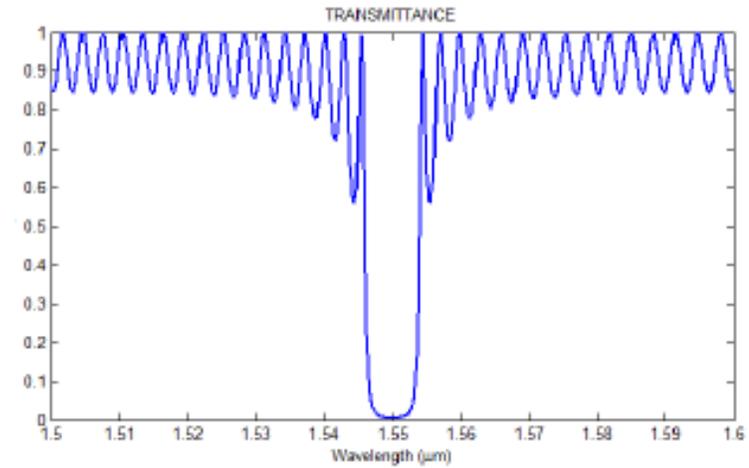
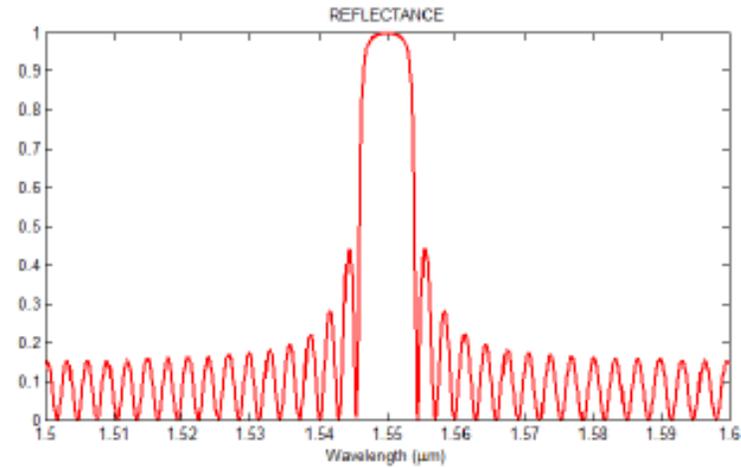
$$n_2 = 1.51$$

$$d_1 = \frac{\lambda_{0,\text{Bragg}}}{4n_1} = 258.3 \text{ nm}$$

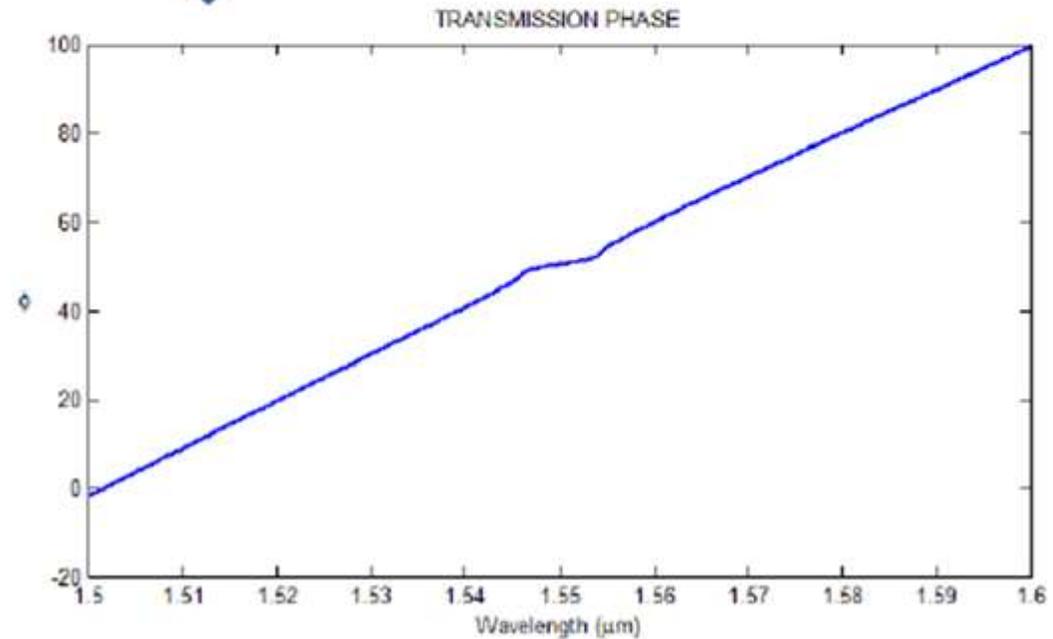
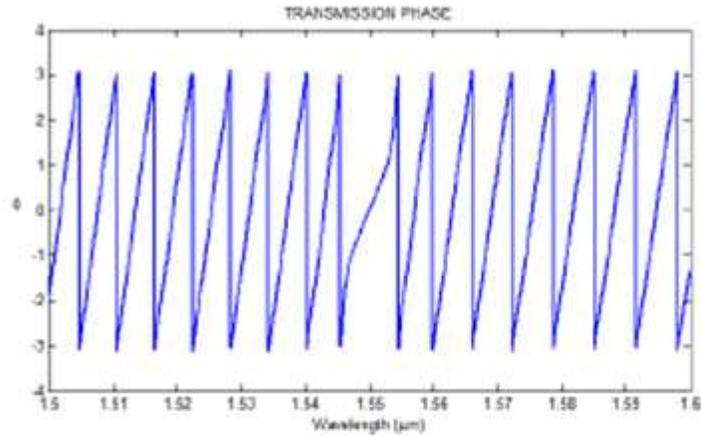
$$d_2 = \frac{\lambda_{0,\text{Bragg}}}{4n_2} = 256.6 \text{ nm}$$

$$\# \text{ Periods} = 500$$

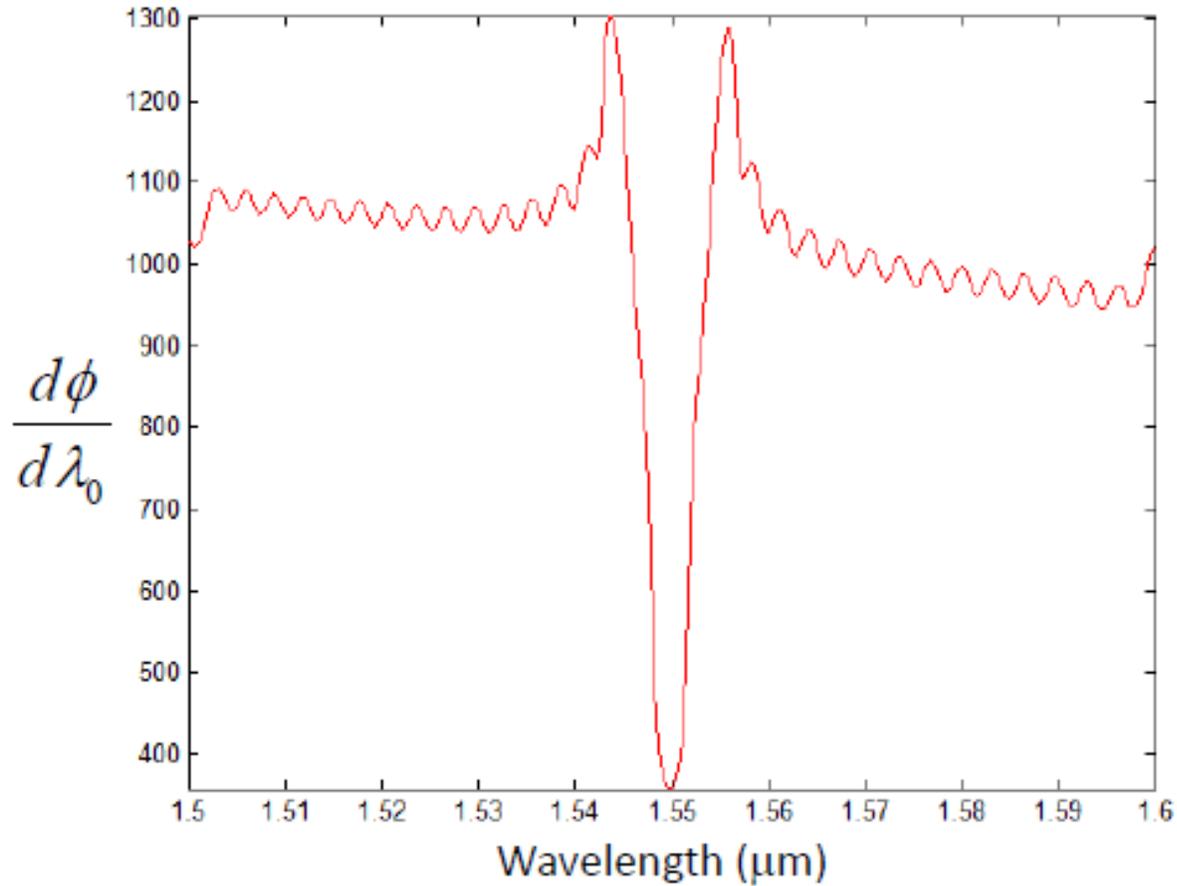
Respostas



Desenrolando a Fase

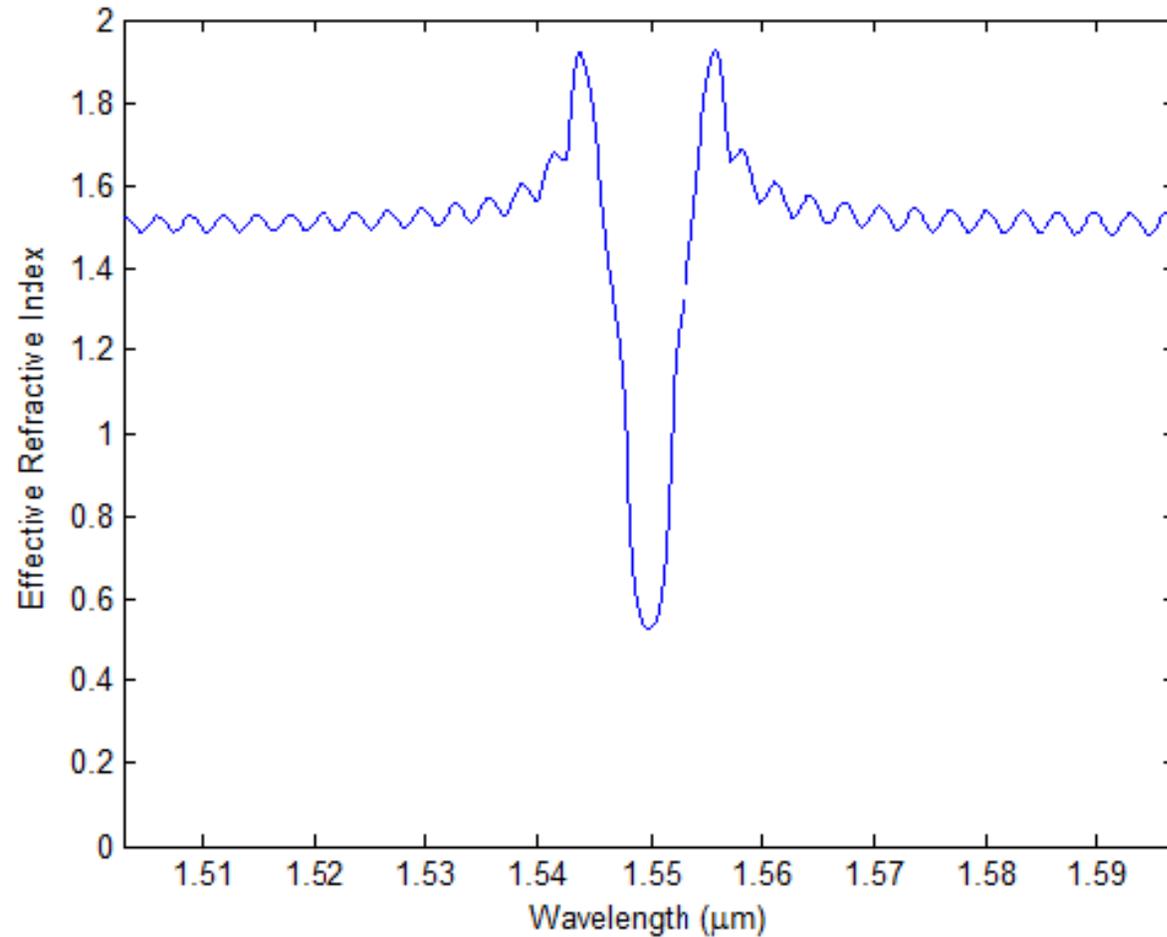


Calculando $d\phi/d\lambda$



$$\frac{d\phi}{d\lambda_0} \approx \frac{\phi(\lambda_{i+1}) - \phi(\lambda_{i-1})}{2\Delta\lambda}$$

Calculando n_{eff} de $d\phi/d\lambda$



$$n_{eff} = \frac{\lambda_0^2}{2\pi d} \frac{d\phi}{d\lambda_0}$$

**Obrigado pela atenção!
Até a próxima aula...**